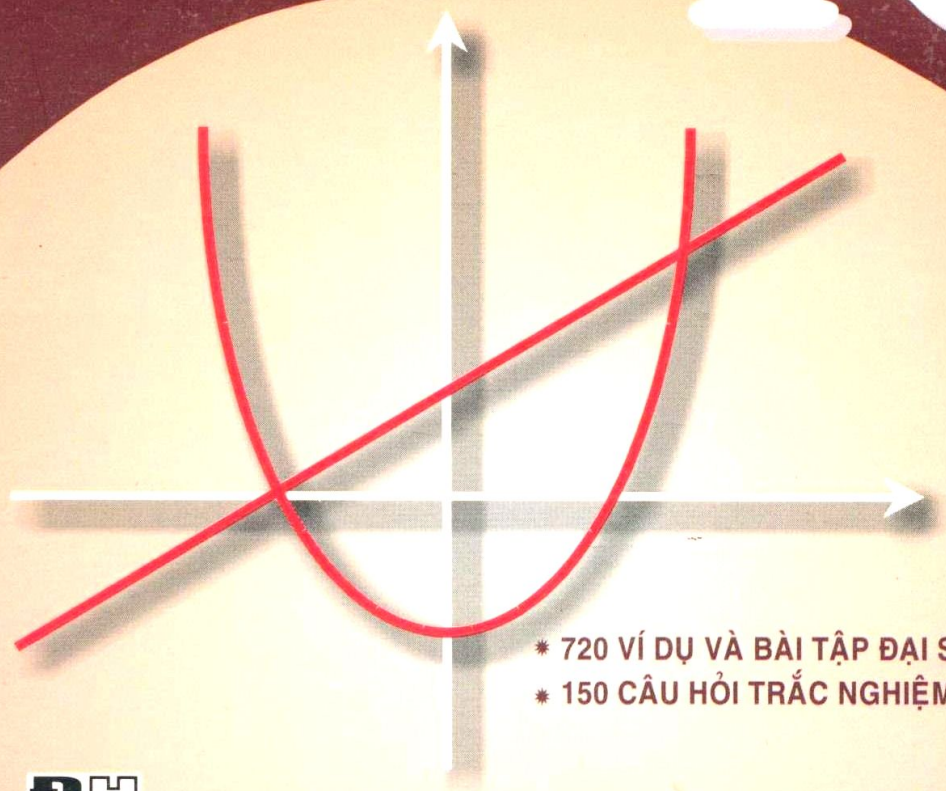
LÊ HỒNG ĐỨC (chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Đại số 10

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)



* 720 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
* 150 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ 10

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

ĐẠI SỐ 10

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

- 720 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
- 150 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức tổng chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 6 cuốn:

Cuốn 1: Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2: Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3: Học và ôn tập - Hình học 11
Cuốn 4: Học và ôn tập - Đại số & Giải tích 11
Cuốn 5: Học và ôn tập - Hình học 12
Cuốn 6: Học và ôn tập - Giải tích 12

Mục tiêu của bộ tài liệu này là cung cấp cho các Thày, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thày, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ 10

được chia thành 4 phần:

Phần I: Tập hợp
Phần II: Hàm số
Phần III: Phương trình, bất phương trình và hệ bậc nhất
Phần IV: Phương trình, bất phương trình và hệ bậc hai

bao gồm 50 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 81 dạng toán cơ bản và nâng cao của Đại số 10.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Ths. Lê Hồng Đức
Điện thoại: (04) 7196671
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Tôi cũng sinh hày tỏ tại đây lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của hai người Thày mà tôi rất mực kính trọng, gồm GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám đốc Trung Tâm KHTN & CNQG. Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu trưởng Trường PTTH Hà Nội – Amsterdam.

Hà Nội, ngày 18 tháng 8 năm 2003
Lê Hồng Đức

PHẦN I
TẬP HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta cần nắm được các nội dung:

1. ***Tập hợp*** là một khái niệm cơ bản của toán học.
   - Để chỉ rằng a là một phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $a \in A$.
   - Còn nếu b không phải là phần tử của tập hợp A ta kí hiệu $b \notin A$.
2. Có hai cách ***xác định tập hợp***:

   Cách 1: *Liệt kê các phần tử của nó*: tập hợp X gồm các phần tử x, y, z... ta viết:

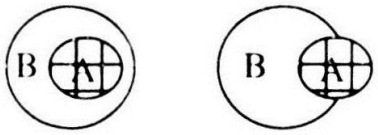
   $$X = \{x, y, z...\}$$

   Cách 2: *Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó*: để chỉ rằng tập hợp X gồm tất cả các phần tử có tính chất P, ta viết:

   $$X = \{x \mid x \text{ có thuộc tính P}\}$$

3. ***Tập rỗng*** là tập không có phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$.

4. ***Tập con***: Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, thì ta nói rằng A là một tập hợp con (hay vắn tắt *tập con*) của B, và kí hiệu $A \subset B$.



$A \subset B$ $A \not\subset B$

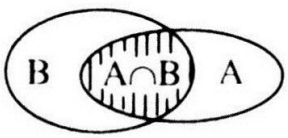
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Với tập A bất kỳ luôn có $\varnothing \subset A$ và $A \subset A$.

5. ***Tập hợp bằng nhau***: Nếu A và B là hai tập hợp gồm những phần tử như nhau, tức là mọi phần tử của A đều là phần tử của B, và mọi phần tử của B đều là phần tử của A, thì ta nói rằng các tập hợp A và B là bằng nhau, và kí hiệu $A = B$.

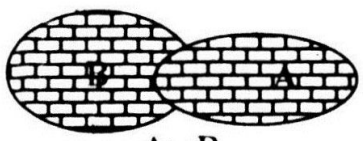
$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

6. ***Giao của hai tập hợp***: Cho hai tập hợp A và B. Tập hợp tất cả các phần tử chung cho A và B, được gọi là giao của A và B, và được kí hiệu $A \cap B$.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

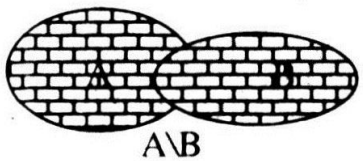
7. ***Hợp của hai tập hợp***: Cho hai tập hợp A và B. Tập hợp tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập hợp A và B, được gọi là hợp của A và B, và được kí hiệu $A \cup B$.



$A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

8. ***Hiệu của hai tập hợp***: Cho hai tập A và B. Tập hợp tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B, và được kí hiệu A\B.



$A \setminus B$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

9. Các tập hợp thường dùng:
   - Tập hợp các số tự nhiên $N = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.
   - Tập hợp các số nguyên $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$.

- Tập hợp các số hữu tỉ $Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq 0\}$.
- Tập hợp các số thực $R = \{x | x$ hữu tỉ hoặc vô tỉ$\}$.

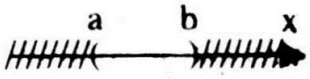
Với quy ước $R = (-\infty, +\infty)$, ta cũng có:

$R_+ = [0, +\infty)$, $R_- = (-\infty, 0]$,

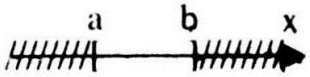
$R^* = R\backslash\{0\}$,

$R_+^* = (0, +\infty)$, $R_-^* = (-\infty, 0)$

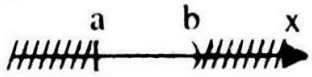
- Khoảng $(a, b) = \{x \in R | a < x < b\}$, được biểu diễn:



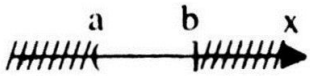
- Đoạn $[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$, được biểu diễn:



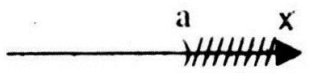
- Nửa khoảng $[a, b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$, được biểu diễn:



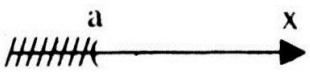
- Nửa khoảng $(a, b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$, được biểu diễn:



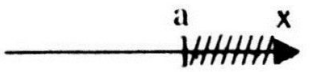
- Khoảng $(-\infty, a) = \{x \in R | x < a\}$, được biểu diễn:



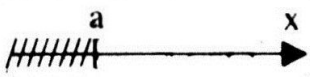
Khoảng $(a, +\infty) = \{x \in R | x > a\}$, được biểu diễn:



- Nửa khoảng $(-\infty, a] = \{x \in R | x \leq a\}$, được biểu diễn:



Nửa khoảng $[a, +\infty) = \{x \in R | x \geq a\}$.



Bài toán 1: Xác định tập hợp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với tập hợp A ta có hai cách:

Cách 1: Liệt kê các phần tử của A.

Cách 2: Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của A.

2. Sử dụng định nghĩa về các phép toán của tập hợp:

- $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

  Nếu dùng trục số để biểu diễn ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Biểu diễn A trên trục số.

  Bước 2: Biểu diễn B trên trục số.

  Bước 3: Gạch bỏ phần $R\backslash(A\cup B)$, phần còn lại trên trục số chính là $A\cup B$.

- $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

  Nếu dùng trục số để biểu diễn ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Biểu diễn A trên trục số và gạch bỏ phần $R\backslash A$.

  Bước 2: Biểu diễn B trên trục số và gạch bỏ phần $R\backslash B$.

  Bước 3: Phần còn lại trên trục số chính là $A\cap B$.

- $A\backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.
- $P(A) = \{X | X \subset A\}$.

3. Tìm các tập con của tập A, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định số phần tử của A, giả sử bằng k.

Bước 2: Liệt kê các tập hợp gồm tập $\varnothing$, A và các tập con có 1, 2, ..., k-1 phần tử của A.

Bài toán 2: Chứng minh $A \subset B$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựachọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy phần tử bất kỳ $x \in A$, rồi chứng minh rằng $x \in B$.

Bước 2: Vậy $A \subset B$.

Cách 2: Sử dụng tính chất chất bắc cầu:

$$\begin{cases} A \subset C \\ C \subset B \end{cases} \Rightarrow A \subset B.$$

Cách 3: Bằng cách liệt kê A, B, từ đó suy ra $A \subset B$.

Bài toán 3: Chứng minh $A = B$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựachọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Chứng minh $A \subset B$.

  Bước 2: Chứng minh $B \subset A$.

  Bước 3: Vậy $A = B$.

Lưu ý: Nếu các phép biến đổi là tương đương, tức là:

$$x \in A \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \in B$$

Ta khẳng định ngay $A = B$.

Cách 2: Sử dụng tính chất chất bắc cầu:

$$\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = B.$$

Cách 3: Bằng cách liệt kê A, B, từ đó suy ra $A = B$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho A là tập hợp học sinh sống cách xa trường VĐ trong vòng bán kính 1km, B là tập hợp học sinh đạt từ 55 điểm trở lên khi thi tốt nghiệp. Hãy mô tả các học sinh thuộc một trong các tập hợp sau:

a. $A \cap B$.

b. $A \cup B$.

c. $A \setminus B$.

d. $B \setminus A$.

Giải.

a Ta có $A \cap B$ là tập hợp học sinh sống cách xa trường VĐ trong vòng bán kính 1km ***và*** đạt từ 55 điểm trở lên khi thi tốt nghiệp.

b Ta có $A \cup B$ là tập hợp học sinh sống cách xa trường VĐ trong vòng bán kính 1km ***hoặc*** đạt từ 55 điểm trở lên khi thi tốt nghiệp.

c Ta có $A \setminus B$ là tập hợp học sinh sống cách xa trường VĐ trong vòng bán kính 1km ***và*** có điểm thi tốt nghiệp nhỏ hơn 55.

d Ta có $B \setminus A$ là tập hợp học sinh đạt từ 55 điểm trở lên khi thi tốt nghiệp ***và*** sống cách xa trường VĐ hơn 1km.

Ví dụ 2: Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê phần tử:

a. $C = \{x \in Z \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$.

b. $A = \{x \in N \mid (2x + x^2)(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 12) = 0\}$.

c. $B = \{x \in Q \mid (2x + 1)(x^2 + x - 1)(2x^2 - 3x + 1) = 0\}$.

Giải.

a. Ta có:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{3} \text{ đều không thuộc } Z.$$

Vậy $C = \varnothing$.

b. Ta có:

$$(2x + x^2)(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + x^2 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{bmatrix} \overset{x \in N}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{bmatrix}$$

Vậy $A = \{0, 1, 4\}$.

c. Ta có

$$(2x+1)(x^2+x-1)(2x^2-3x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x-1=0 \\ 2x^2-3x+1=0 \end{cases} \overset{x\in Q}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $B=\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

Ví dụ 3: Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê phần tử:

a. $A=\{x\in N \mid x^2>2 \wedge x<4\}$.

b. $B=\{x\in Z \mid \sqrt{x}\le 2 \wedge x>-2\}$.

Giải.

a. Ta có:

$$\begin{cases} x^2>2 \\ x<4 \end{cases} \overset{x\in N}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>\sqrt{2} \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}<x<4 \overset{x\in N}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $A=\{2, 3\}$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\le 2 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 4 \overset{x\in Z}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ví dụ 4: Xác định các tập hợp $A\cap B$ bằng hai cách, biết:

a. $A=\{x\in N \mid x \text{ ước của } 12\}$ và $B=\{x\in N \mid x \text{ ước của } 15\}$.

b. $A=\{x\in N \mid x \text{ bội của } 3\}$ và $B=\{x\in N \mid x \text{ bội của } 7\}$.

Giải.

a Ta có:

$A\cap B=\{x\in N \mid x \text{ ước của } 12 \text{ và ước của } 15\}$

$=\{x\in N \mid x \text{ ước của usc}ln(12, 15)\}$

$=\{x\in N \mid x \text{ ước của } 3\}$ - *Chỉ ra tính chất đặc trưng.*

$=\{1, 3\}$ - *Liệt kê.*

b Ta có:

$A\cap B=\{x\in N \mid x \text{ bội của } 3 \text{ và bội của } 7\}$

$=\{x\in N \mid x \text{ bội của bscnn}(3, 7)\}$

$=\{x\in N \mid x \text{ bội của } 21\}$ - *Chỉ ra tính chất đặc trưng.*

$=\{0, 21, 42, ...\}$ - *Liệt kê.*

Ví dụ 5: Tìm tập hợp X sao cho:

$$\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d\}.$$

Giải.

Ta được:

$X = \{a, b\}$,

$X = \{a, b, c\}$,

$X = \{a, b, d\}$,

$X = \{a, b, c, d\}$.

Ví dụ 6: Cho hai tập A, B, biết:

$A = \{a, b, c, d, e\}$,

$B = \{a, c, e, f\}$.

Tìm tập hợp X sao cho $X \subset A$ và $X \subset B$.

Giải.

Ta có:

$$\begin{cases} X \subset A \\ X \subset B \end{cases} \Leftrightarrow X \subset (A \cap B) = \{a, c, e\}.$$

Vậy X có thể là:

$X = \{a\}$, $X = \{c\}$, $X = \{e\}$,

$X = \{a, c\}$, $X = \{c, e\}$, $X = \{e, a\}$,

$X = \{a, c, e\}$.

Ví dụ 7: Cho hai tập A, B, biết:

$A = \{a, b\}$,

$B = \{a, b, c, d\}$.

Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Giải.

Ta có:

$$A \cup X = B \Leftrightarrow (B \setminus A) \subset X \subset B$$

Vậy X có thể là:

$X = \{c, d\}$,

$X = \{a, c, d\}$, $X = \{b, c, d\}$,

$X = \{a, b, c, d\}$.

Ví dụ 8: Tìm tập hợp A và B, biết:

$$\begin{cases} A \setminus B = \{1,5,7,8\} \\ B \setminus A = \{2,10\} \\ A \cap B = \{3,6,9\} \end{cases} \quad (1)$$

Giải.

Từ hệ (I), ta được:

$$\begin{cases} \{1,5,7,8\} \subset A \\ \{1,5,7,8\} \not\subset B \\ \{2,10\} \subset B \\ \{2,10\} \not\subset A \\ \{3,6,9\} \subset A \\ \{3,6,9\} \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \{1,5,7,8\} \cup \{3,6,9\} \\ B = \{2,10\} \cup \{3,6,9\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \{1,3,5,6,7,8,9\} \\ B = \{2,3,6,9,10\} \end{cases}$$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Giải.

Với x bất kỳ ta có:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Vậy $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Lưu ý: Biểu thức trên được phát biểu là

"Phép giao phân phối đối với phép hợp".

Ví dụ 10: Chứng minh rằng:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Giải.

Với x bất kỳ ta có:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Vậy $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Lưu ý: Biểu thức trên được phát biểu là

"Phép hợp phân phối đối với phép giao".

Ví dụ 11: Chứng minh rằng:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Giải.

Với x bất kỳ ta có:

$$x\in A\setminus(B\cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B\cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \\ x\notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A\setminus B \\ x\in A\setminus C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x\in (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Vậy $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Ví dụ 12: Chứng minh rằng:

$$P(A\cap B) = P(A)\cap P(B).$$

Giải.

Với X bất kỳ ta có:

$$X\in P(A\cap B) \Leftrightarrow X\subset A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} X\subset A \\ X\subset B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X\in P(A) \\ X\in P(B) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X\in P(A)\cap P(B)$.

Vậy $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

Ví dụ 13: Cho hai tập:

$A=\{x\in Z \mid x$ là bội của 3 và 4$\}$,

$B=\{x\in Z \mid x$ là bội của 12$\}$,

Chứng minh rằng A = B.

Giải.

- Chứng minh $A\subset B$

Ta có:

$x\in A \Rightarrow x$ là bội của 3 và 4

$\Rightarrow x = 3k = 4l$, với $k, l\in Z$

$\Rightarrow l$ chia hết cho 3

$\Rightarrow l = 3l_1$, với $l_1\in Z$

$\Rightarrow x = 12l_1$

$\Rightarrow x$ là bội của 12

$\Rightarrow x\in B$

Do đó $A\subset B$.

- Chứng minh $B\subset A$

Ta có:

$x\in B \Rightarrow x$ là bội của 12

$\Rightarrow x = 12n = 3.(4n) = 4.(3n)$, với $n\in Z$

$\Rightarrow x$ là bội của 3 và 4

$\Rightarrow x\in A$

Do đó $B\subset A$.

Vậy A = B.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai tập hợp:

A = {a, b, c, d},

B = {a, b, c, 1, d}.

Cho biết các mệnh đề sau đây là đúng hay sai:

a. $A = B$.
b. $A \subset B$.
c. $x \in A \rightarrow x \in B$.
d. $x \in B \Rightarrow x \in A$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. $A \cap \varnothing = \varnothing$
b. $A \backslash \varnothing = A$

Bài tập 3: Kết luận gì về các tập A và B nếu:

a. $A \backslash B = A$
b. $A \backslash B = B \backslash A$
c. $A \cup C = B \cup C$
d. $A \cap C = B \cap C$

Bài tập 4: Cho:

$$A \cup X = A$$

Khi đó X có thể là:

a. $X = \varnothing$.
b. $X = A$.
c. $X \subset A$.
d. Kết quả khác.

Bài tập 5: Cho:

$$A \cap X = A$$

Khi đó X có thể là:

a. $X = A$.
b. $A \subset X$.
c. Kết quả khác.

Bài tập 6: Cho:

$$A \backslash X = \varnothing$$

Khi đó X có thể là:

a. $X = \varnothing$
b. $X = A$.
c. Kết quả khác.

Bài tập 7: Cho A là tập hợp học sinh lớp 10 của trường VĐ và B là tập hợp học sinh của trường VĐ dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc một trong các tập hợp sau:

a. $A \cap B$.
b. $A \cup B$.
c. $A \backslash B$.
d. $B \backslash A$.

Bài tập 8: Cho hai tập A, B, biết:

$A = \{a, b, c, d\}$,
$B = \{a, c, d, e, f\}$.

Tập hợp X sao cho $X \subset A$ và $X \subset B$ có thể là:

a. $\{a\}, \{c\}, \{d\}$.
b. $\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$.
c. $\{a, c, d\}$.
d. Cả a), b), c) đều đúng.

Bài tập 9: Tập hợp X sao cho:

$$\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d, e\}$$

là:

a. $\{a, b\}$.
b. $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}$.
c. $\{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}$.
d. $\{a, b, c, d, e\}$.
e. Cả a), b), c), d) đều đúng.

Bài tập 10: Cho hai tập A, B, biết:

$A = \{1, 2\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Có bao nhiêu tập hợp X thoả mãn $A \cup X = B$.

a. 1 tập.
b. 3 tập.
c. 4 tập.
d. Một đáp số khác.

Bài tập 11: Chứng minh rằng:

a. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
b. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
c. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
d. $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$

Bài tập 12: Chứng minh rằng:

a. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$
b. $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \varnothing$

Bài tập 13: Chứng minh rằng:

a. $(A \cap B) \subset A$
b. $(A \setminus B) \subset A$
c. $(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus C$
d. $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$
e. $(A \cap B \cap C) \subset (A \cap B)$
f. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

Bài tập 14: Cho hai tập:

$A = \{x \in Z \mid x$ là bội của 2 và $3\}$,

$B = \{x \in Z \mid x$ là bội của $6\}$,

Chứng minh rằng $A = B$.

Bài tập 15: Bằng cách biểu diễn trên trục số. Xác định $A \cap B$ với

a. $A = \{x \in R \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \in R \mid x \leq 5\}$
b. $A = \{x \in R \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \in R \mid x \geq 5\}$.
c. $A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$, $B = \{x \in R \mid x \leq 5\}$.
d. $A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$, $B = \{x \in R \mid x \geq 5\}$.

Bài tập 16: Cho ba tập hợp:

$A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 5\}$,

$B = \{x \in R \mid 4 \leq x \leq 7\}$,

$C = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 6\}$.

a. Viết các tập $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.
b. Gọi $D = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$. Xác định a, b để $D \subset A \cap B \cap C$.

Bài tập 17: Bằng cách biểu diễn trên trục số, tìm nghiệm của các hệ:

a. $\begin{cases} x < 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}$

b. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases}$

c. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x < -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \end{array}\right.$

d. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

PHẦN II
HÀM SỐ
CHỦ ĐỀ 1
TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Với một hàm số

$$y = f(x),$$

ta có:

$$D = \{x \in \mathbf{R} | \text{ y tồn tại}\},$$

khi đó D gọi là *tập xác định* của hàm số.

Bài toán 1: Tìm tập xác định của hàm số

$$y = f(x).$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in R | f(x) \in R\}.$$

Phương pháp 2. Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là: $D = \mathbf{R} \backslash E$.

Chú ý. Thông thường f(x) cho bởi biểu thức đại số thì với:

- $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ điều kiện là

$$\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ có nghĩa} \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}$$

- $f(x) = \sqrt[2k]{f_1(x)}$ $(k \in Z)$ điều kiện là

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa} \\ f_1(x) \geq 0 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

b. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

c. $y = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$.

Giải.

a. Hàm số xác định khi:

$x^2 + x + 1 \neq 0$ luôn đúng.

Vậy tập xác định của hàm số là D = R.

b. Hàm số xác định khi:

$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{1\}$.

c. Hàm số xác định khi:

$$x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{0, 2\}$.

Chú ý: Nếu các em học sinh biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

rồi khẳng định hàm số xác định khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ và do đó tập $D = R\backslash\{2\}$ Đây là lời giải sai vì phép biến đổi hàm số không phải là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{2-x}$.

b. $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

Giải.

a. Hàm số xác định khi:

$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-3, 6]$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các **hàm số** sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

b. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Giải.

a. Hàm số xác định khi:

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \right. \right. \left. \left. \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \right. \right. \right. \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1, 3]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-3x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (x-1)(x-2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-2 \le 0 \end{cases} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x \le 1 \\ x \le 2 \end{cases} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 1 \end{cases} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{|x|-4}$.

b. $y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

Giải.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ |x|-4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \ne 4$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [0, +\infty)\backslash\{4\}$.

b. Biến đổi tương đương hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{x+2+2\sqrt{x+2}+1} + \sqrt{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}+1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1-x^2}+1)^2}$$

$$= |\sqrt{x+2}+1| + |\sqrt{1-x^2}+1|$$

$$= \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x^2} + 2.$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 1-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ (1-x)(1+x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1+x \ge 0 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} 1-x \le 0 \\ 1+x \le 0 \end{cases} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -1 \end{cases} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1]$.

LC/1113

Ví dụ 5: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

b. $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{(x-3)\sqrt{x-1}}$.

Giải.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 3]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \neq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1, 4]\backslash\{3\}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x-m+2}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên $[-1, 1)$.

Giải.

Hàm số xác định khi:

$$x - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 2.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{m-2\}$.

Vậy để hàm số xác định trên $[-1, 1)$ điều kiện là:

$$m - 2 \notin [-1, 1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m-2 < -1 \\ m-2 \geq 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < 1 \\ m \geq 3 \end{bmatrix}$$

Vậy với $m < 1 \vee m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên $[0, 1)$.

Giải.

Hàm số xác định khi:

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m-2 \end{cases}.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{m-2, m\}$.

Vậy để hàm số xác định trên [0, 1) điều kiện là:

$$m - 2, m \notin [0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m - 2 \geq 1 \\ m - 2 < 0 < 1 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$$

Vậy với $m < 0 \vee 1 \leq m < 2 \vee m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: Cho hàm số:

$$y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \frac{1}{\sqrt{x - m + 2}}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên (0, 1].

Giải.

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} -x + 2m - 1 \geq 0 \\ x - m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m - 1 \\ x > m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 < x \leq 2m - 1.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = (m - 2, 2m - 1]$.

Vậy để hàm số xác định trên (0, 1] điều kiện là:

$$(0, 1] \subseteq (m - 2, 2m - 1] \Leftrightarrow m - 2 \leq 0 < 1 \leq 2m - 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Vậy với $1 \leq m \leq 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{x - 1}{x^2 - x + 3}$$

có thể là:

a. $\varnothing$. b. R. c. Kết quả khác.

Bài tập 2: Tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

có thể là:

a. $\varnothing$. b. R. c. Kết quả khác.

Bài tập 3: Tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{x + 2}$$

có thể là:

a. R. b. $[-2, +\infty)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 4: Tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{7 + x}$$

có thể là:

a. $\varnothing$. b. $[-7, 2)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 5: Tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$$

có thể là:

a. $(1, 2)$. b. $[2, 3]$. c. Kết quả khác.

Bài tập 6: Tập xác định của hàm số:

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

có thể là:

a. $\varnothing$. b. $\mathbf{R}$. c. Kết quả khác.

Bài tập 7: Tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

có thể là:

a. $(-\infty,-2)$. b. $(2, +\infty)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 8: Tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$$

có thể là:

a. $(1, \frac{5}{2})$. b. $(\frac{5}{2}, +\infty)\backslash\{2\}$. c. Kết quả khác.

Bài tập 9: Tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x|x|-1}}$$

có thể là:

a. $[0, +\infty)$. b. $(1, +\infty)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 10: Tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{x + 1}}$$

có thể là:

a. $[-2, 2]$. b. $(-1, 2)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 11: Cho hàm số:

$$y = \frac{x + 1}{x - 2m + 1}.$$

Hàm số xác định trên $[0, 1)$ khi:

a. $m = 1$. b. $m = \frac{1}{2}$. c. Kết quả khác.

Bài tập 12: Cho hàm số:

$$y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \frac{1}{\sqrt{2x - m}}.$$

Hàm số xác định trên $(1, 3)$ khi:

a. $m = 1$. b. $m = 2$. c. Kết quả khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $D = \{x \in R \mid x^2 - x + 3 \neq 0\} = R$.

Bài tập 2: $D = \{x \in R \mid x^2 + 1 \neq 0\} = R$.

Bài tập 3: $D = \{x \in R \mid x + 2 \geq 0\} = \{x \in R \mid x \geq -2\} = [-2, +\infty)$.

Bài tập 4: $D = \{x \in R \mid 2 - x \geq 0 \ \& \ 7 + x \geq 0\} = \{x \in R \mid x \leq 2 \ \& \ x \geq -7\} = [-7, 2]$.

Bài tập 5: $D = \{x \in R \mid -x^2 + 5x - 6 \geq 0\} = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$

$= \{x \in R \mid (x - 3)(x - 2) \leq 0\} = [2, 3]$.

Bài tập 6: Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x < 0 \\ \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \forall x$.

Vậy $D = R$.

Bài tập 7: Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ (x - 2)(x + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

Vậy $D = (-\infty, -2)$.

Bài tập 8: Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5/2 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 5/2 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy $D = (1, \frac{5}{2}] \setminus \{2\}$.

Bài tập 9: Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \mid x \mid -1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x.x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x - 1)(x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x > 1$.

Vậy $D = (1, +\infty)$.

Bài tập 10: Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x + 2) \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy $D = [-2, 2] \setminus \{-1\}$.

Bài tập 11:

Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$x - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m - 1$.

Vậy để hàm số xác định trên $[0, 1)$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \notin [0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{array}\right.$$

Bài tập 12:

Hàm số có nghĩa ($x \in D$) khi:

$$\begin{cases} -x + 2m - 1 \geq 0 \\ 2x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m - 1 \\ x > \dfrac{m}{2} \end{cases}.$$

Vậy để hàm số xác định trên (1, 3)

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2} \leq 1 < 3 \leq 2m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

CHỦ ĐỀ 2
SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b).

1. Một hàm số $y = f(x)$ gọi là *tăng hay đồng biến* trong khoảng (a, b) nếu với x_1, x_2 bất kỳ thuộc khoảng đó ta có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2. Một hàm số $y = f(x)$ gọi là *giảm hay nghịch biến* trong khoảng (a, b) nếu với x_1, x_2 bất kỳ thuộc khoảng đó ta có

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Bài toán: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên (a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

Phương pháp 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in (a, b)$ với $x_1 \neq x_2$ ta thiết lập tỉ số:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $A > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số đồng biến trên (a, b).
- Nếu $A < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số nghịch biến trên (a, b).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = x - 2.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - 2) - (x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = 1 > 0, \text{ với } \forall x_1, x_2 \in R \text{ và } x_1 \neq x_2$$

Vậy hàm số đồng biến trên R.

Tổng quát: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax + b.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = a.$$

Khi đó:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên R.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên R.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = x^2.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Tổng quát: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c)}{x_1 - x_2}$$

$$= a(x_1 + x_2) + b = a(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}).$$

Khi đó:

1. Với $a > 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > -\frac{b}{2a}$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < -\frac{b}{2a}$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, -\frac{b}{2a})$
2. Với $a < 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > -\frac{b}{2a}$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < -\frac{b}{2a}$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty, -\frac{b}{2a})$.

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ trên } (1, +\infty).$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$$

với mọi $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1, +\infty)$.

Ví dụ 4: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1})} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}$$

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Ví dụ 5: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1.$$

Giải.

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1 + 1) - (x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 + 1)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) + 9] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2} > 0$$

với mọi $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$

Vậy hàm số đồng biến trên R.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x + 3$.

b. $y = f(x) = 2 - 3x$.

Bài tập 2: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$.

b. $y = f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Bài tập 3: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

b. $y = f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$.

Bài tập 4: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$.

Bài tập 5: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{-3x^2+2x+1}$.

Bài tập 6: Khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = x^3 + x + 1$.

b. $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Hàm số đồng biến trên R.

b. Hàm số nghịch biến trên R.

Bài tập 2:

a. Hàm số đồng biến trên $(-1, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, -1)$.

b. Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 2)$ và nghịch biến trên $(2, +\infty)$.

Bài tập 3:

a. Hàm số nghịch biến trên R.

b. Hàm số đồng biến trên R.

Bài tập 4:

a. Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

b. Hàm số đồng biến trên $(-2, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, -2)$.

Bài tập 5:

a. Hàm số đồng biến trên $(3, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, 1)$.

b. Hàm số đồng biến trên $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$ và nghịch biến trên $(\dfrac{1}{3}, 1)$.

Bài tập 6:

a. Hàm số đồng biến trên R.

b. Hàm số đồng biến trên R.

CHỦ ĐỀ 3
TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm chẵn* nếu với mọi $x \in D$ ta có:

$$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm lẻ* nếu với mọi $x \in D$ ta có:

$$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Nhận xét:

- Hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

Bài toán 1: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = f(x)$ là chẵn hoặc lẻ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm chẵn (hoặc lẻ) nếu:

$$\begin{cases} D \text{ là tập đối xứng} \\ \forall x \in D \text{ có } f(-x) = f(x) \end{cases} \left(\text{hoặc } \begin{cases} D \text{ là tập đối xứng} \\ \forall x \in D \text{ có } f(-x) = -f(x) \end{cases}\right)$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$.

b. $y = f(x) = x^2 + 4$.

c. $y = f(x) = x^3 + 3x$.

Giải.

a. Hàm số xác định trên D = R là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + 2x^2 - x + 1 \neq \pm f(x).$$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

b. Hàm số xác định trên D = R là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x).$$

Vậy hàm số là chẵn.

c. Hàm số xác định trên D = R là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x).$$

Vậy hàm số là lẻ.

Chú ý: Với hàm đa thức bậc n

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

- Nếu các hệ số bậc lẻ bằng 0 thì hàm số là hàm chẵn.
- Nếu các hệ số bậc chẵn bằng 0 thì hàm số là hàm lẻ.
- Nếu tồn tại ít nhất một hệ số bậc chẵn và một hệ số bậc lẻ khác 0 thì hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

b. $y = f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

c. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

Giải.

a. Hàm số xác định trên D = R\{ 1 } không là tập đối xứng.

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

b. Hàm số xác định trên $D = R\setminus\{-2, 2\}$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 3(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 2} = f(x).$$

Vậy hàm số là chẵn.

c. Hàm số xác định trên $D = R\setminus\{0\}$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x).$$

Vậy hàm số là lẻ.

Ví dụ 3: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $y = f(x) = \sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{2x+3}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

Giải.

a. Hàm số xác định trên D=R là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)-3} - \sqrt[3]{2(-x)+3} = -\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{2x-3} = f(x).$$

Vậy hàm số là chẵn.

b. Hàm số xác định trên $D = [-1, 1]$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = f(x).$$

Vậy hàm số là chẵn.

Ví dụ 4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $y = f(x) = |x + 1| - |1 - x|$.

b. $y = f(x) = |x|^3(x^2 - 1)$.

Giải.

a. Hàm số xác định trên $D = R$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = |-x+1|-|1+x| = -(|x+1|-|1-x|) = -f(x).$$

Vậy hàm số là lẻ.

b. Hàm số xác định trên $D = R$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = |-x|^3[(-x)^2 - 1] = |x|^3(x^2 - 1) = f(x).$$

Vậy hàm số là chẵn.

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$y = f(x) = mx^3 + x^2 + 2m(m-1)x - 1.$$

Xác định m để hàm số là hàm chẵn.

Giải.

Hàm số xác định trên D = R là tập đối xứng.

Khi đó để hàm số là hàm chẵn điều kiện là:

$$f(-x) = f(x),\ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2m(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = f(x) = \frac{1}{mx^2 + 2(m-1)x - m}.$$

Tuỳ theo m hãy xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

Giải.

- Với m = 0, ta được:

$$y = f(x) = -\frac{1}{2x}$$

Hàm số này xác định trên D = R\{0} là tập đối xứng và có:

$$f(-x) = -\frac{1}{2(-x)} = \frac{1}{2x} = -f(x),$$

do đó nó là hàm lẻ.

- Với m = 1, ta được:

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Hàm số này xác định trên D = R\{−1, 1} là tập đối xứng và có:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x),$$

do đó nó là hàm chẵn.

- Với $m \neq 0 \wedge m \neq 1$.

Hàm số $g(x) = mx^2 + 2(m-1)x - m$ không chẵn cũng không lẻ do đó hàm số y = f(x) cũng không chẵn, không lẻ.

Kết luận:

- Với m = 0, hàm số là lẻ.
- Với m = 1, hàm số là chẵn.
- Ngoài ra nó không chẵn, không lẻ.

Bài toán cơ bản 1: Cho $a \in R$, xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho:

$$f(a - x) = f(x), \text{ với } \forall x \in R. \quad (1)$$

Giải.

Đặt $x = \frac{a}{2} - t \Leftrightarrow t = \frac{a}{2} - x$ và $a - x = \frac{a}{2} + t$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(\frac{a}{2} + t) = f(\frac{a}{2} - t), \forall t \in R. \quad (2)$$

Đặt $g(t) = f(\frac{a}{2} + t)$, suy ra $g(-t) = f(\frac{a}{2} - t)$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow g(t) = g(-t), \forall t \in R$$

do đó $g(t)$ là hàm chẵn trên R.

Vậy

$$f(x) = g(x - \frac{a}{2}),$$

với $g(x)$ là hàm chẵn tuỳ ý trên R

Bài toán cơ bản 2: Cho $a, b \in R$, xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho:

$$f(a - x) + f(x) = b, \text{ với } \forall x \in R. \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t = \frac{a}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} - t$ và $a - x = \frac{a}{2} + t$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(\frac{a}{2} + t) + f(\frac{a}{2} - t) = b, \forall t \in R$$

$$\Leftrightarrow f(\frac{a}{2} + t) - \frac{b}{2} + f(\frac{a}{2} - t) - \frac{b}{2} = 0, \forall t \in R. \quad (2)$$

Đặt $g(t) = f(\frac{a}{2} + t) - \frac{b}{2}$, suy ra $g(-t) = f(\frac{a}{2} - t) - \frac{b}{2}$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow g(t) + g(-t) = 0, \forall t \in R \Leftrightarrow g(-t) = -g(t), \forall t \in R$$

do đó $g(t)$ là hàm lẻ trên R.

Vậy

$$f(x) = g(x - \frac{a}{2}) + \frac{b}{2},$$

với $g(x)$ là hàm lẻ tuỳ ý trên R

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hàm số:

$$y = f(x) = -x^3 + x + 1$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 2: Hàm số:

$$y = f(x) = 3x^4 - x^2 + 4$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 3: Hàm số:

$$y = f(x) = x^3 - x.$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 4: Hàm số:

$$y = f(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{x+1}$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 5: Hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 6: Hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}.$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 7: Hàm số:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. Không chẵn, không lẻ.

Bài tập 8: Hàm số:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. **Không chẵn, không lẻ.**

Bài tập 9: Hàm số:

$$y = f(x) = |2x+1| - |1-2x|$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. **Không chẵn, không lẻ.**

Bài tập 10: Hàm số:

$$y = f(x) = |x|^5(x^3 - x + 1)$$

là:

a. Chẵn. b. Lẻ. c. **Không chẵn, không lẻ.**

Bài tập 11: Cho hàm số:

$$y = f(x) = x^3 + (m^2-1)x^2 + m - 1$$

Xác định m để hàm số là hàm lẻ.

Bài tập 12: Cho hàm số:

$$y = f(x) = \frac{1}{(m+1)x^2 + mx - 1}$$

Tuỳ theo m hãy xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

Bài tập 13: Cho hàm số f(x) đồng thời vừa chẵn và vừa lẻ trên R. CMR $f(x) \equiv 0$.

Bài tập 14: CMR mọi hàm số xác định trên R đều có thể viết được dưới dạng hiệu của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ xác định trên R.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Hàm số không chẵn, không lẻ.
Bài tập 2: Hàm số chẵn.
Bài tập 3: Hàm số lẻ.
Bài tập 4: Hàm số không chẵn, không lẻ.
Bài tập 5: Hàm số chẵn.
Bài tập 6: Hàm số lẻ.
Bài tập 7: Hàm số lẻ.
Bài tập 8: Hàm số chẵn.
Bài tập 9: Hàm số lẻ.
Bài tập 10: Hàm số không chẵn, không lẻ.
Bài tập 11: Để hàm số là hàm lẻ điều kiện là:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Bài tập 12:

- Với m = 0, ta được:

$$y = f(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

Hàm số này xác định trên $D = R\backslash\{-1, 1\}$ là tập đối xứng và có:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x),$$

do đó nó là hàm chẵn.

- Với $m = -1$, ta được:

$$y = f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

Hàm số này xác định trên $D = R\backslash\{1\}$ là tập không đối xứng do đó hàm số không chẵn, không lẻ.

- Với $m \neq 0 \wedge m \neq -1$.

Hàm số $g(x) = (m + 1)x^2 + mx - 1$ không chẵn cũng không lẻ do đó hàm số $y = f(x)$ cũng không chẵn, không lẻ.

Kết luận:

- Với m = 0, hàm số là chẵn.
- Ngoài ra nó không chẵn, không lẻ.

CHỦ ĐỀ 4

TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa 1: Đường thẳng $x = a$ là trục đối xứng của đồ thị $y = f(x)$

$\Leftrightarrow$ với phép biến đổi toạ độ:

$$(I)\quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số $Y = F(X)$ là hàm số chẵn.

Bài toán 1: CMR đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \quad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số chẵn.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \quad (1)$$

Bước 2: Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng

$\Leftrightarrow$ hàm số (1) là hàm số chẵn $\Leftrightarrow$ ***tham số*** .

Bước 3: Kết luận.

Bài toán 3: Tìm phương trình đường cong đối xứng với (C): $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi (H) là đường cong đối xứng với (C): $y = f(x)$ qua đường $y = a$.

Bước 2: Khi đó, với mỗi $M(x, y) \in (H)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $y = a$

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ x_1 = x \\ y_1 + y = 2a \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường cong (H).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số:

$$y = x^2 + 2x - 1.$$

Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Giải.

Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$$

ta được:

$$Y = (X - 1)^2 + 2(X - 1) - 1$$

$\Leftrightarrow Y = X^2 - 2$ là hàm số chẵn.

Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Chú ý: Trong phần hàm số bậc 2 ta sẽ chứng minh được rằng hàm số

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

luôn nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

Ví dụ 2: (Đề 149): Cho hàm số:

$$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1.$$

Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số có một trục đối xứng thẳng đứng.

Giải.

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = a$.

Khi đó, với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số

$$Y = (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1 \text{ là hàm số chẵn.}$$

Ta có:

$$Y = (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1$$
$$= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X - 4(X^3 + 3X^2a + 3X a^2 + a^3) - $$
$$-2(X^2 + 2Xa + a^2) + 12(X + a) - 1$$
$$= X^4 + 4(a - 1)X^3 + 2(3a^2 - 6a - 1)X^2 + 4(a^3 - 3a^2 - a + 3)X + a^4 - 4a^3 -$$
$$-2a^2 + 12a - 1 \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-1) = 0 \\ 4(a^3 - 3a^2 - a + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, đồ thị hàm số có một trục đối xứng x = 1.

Ví dụ 3: **(Đề 27): Cho hàm số:**

$$y = x^4 + 4mx^3 - 2x^2 - 12mx$$

Xác định m để đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

Giải.

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy là x = a (a ≠ 0). Khi đó, với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số

$$Y = (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a) \text{ là hàm số chẵn.}$$

Ta có:

$$Y = (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a)$$
$$= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X + 4m(X^3 + 3X^2a + 3X a^2 + a^3) -$$
$$- 2(X^2 + 2Xa + a^2) - 12m(X + a)$$
$$= X^4 + 4(a + m)X^3 + 2(3a^2 + 6am - 1)X^2 + 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m)X +$$
$$+ a^4 + 4ma^3 - 2a^2 - 12ma \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+m) = 0 \\ 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với m = ±1 đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

Ví dụ 4: (HVKTQS - 99): Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Tìm phương trình đường cong đối xứng với đồ thị hàm số (C) qua đường thẳng y = 2.

Giải.

Gọi (H) là đường cong đối xứng với (C) qua đường thẳng y = 2.

Khi đó, với mỗi $M(x, y) \in (H)$

$$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C) \text{ với } y_1 = \frac{x_1^2 + x_1 - 2}{x_1 - 2} \qquad (1)$$

sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $y = 2 \Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 4 - y \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

Vậy, đường cong (H) có phương trình : $y = \dfrac{x^2 + 3x - 6}{x - 2}$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trục đối xứng song song với Oy của đồ thị hàm số:

$$y = x^2$$

là:

a. $x = 0$. b. $x = 1$. c. Kết quả khác.

Bài tập 2: Trục đối xứng song song với Oy của đồ thị hàm số:

$$y = x^2 - 2x + 3$$

là:

a. $x = 1$. b. $x = 2$. c. Kết quả khác.

Bài tập 3: Trục đối xứng song song với Oy của đồ thị hàm số:

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

là:

a. $x = 2$. b. $x = 3$. c. Kết quả khác.

Bài tập 4: Trục đối xứng song song với Oy của đồ thị hàm số:

$$y = x^4.$$

là:

a. $x = 0$. b. $x = 1$. c. Kết quả khác.

Bài tập 5: Trục đối xứng song song với Oy của đồ thị hàm số:

$$y = x^4 + 2x^2 + 2$$

là:

a. $x = 1$. b. $x = 2$. c. Kết quả khác.

Bài tập 6: Cho hàm số:

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng

Bài tập 7: (Đề 93): Cho hàm số

$$y = x^4 + 4x^3 + mx^2.$$

Tìm m để đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

Bài tập 8: Cho hàm số

$$y = x^4 + 4mx^3 - 2(m-1)x^2 - 2mx + 1.$$

Tìm m để đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Trục đối xứng là $x = 0$.

Bài tập 2: Trục đối xứng là $x = 1$.

Bài tập 3: Trục đối xứng là $x = -2$.

Bài tập 4: Trục đối xứng là $x = 0$.

Bài tập 5: Trục đối xứng là $x = 0$.

Bài tập 6: (Đề 93)

Với $m = 4$ đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy là $x = -1$.

CHỦ ĐỀ 5

TÂM ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Điểm I(a, b) là tâm đối xứng của đồ thị $y = f(x)$

$\Leftrightarrow$ với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

hàm số $Y = F(X) - b$ là hàm số lẻ.

Bài toán 1: CMR đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận điểm I(a, b) làm tâm đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \quad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số lẻ.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(a, b) làm tâm đối xứng.

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận điểm I(a, b) làm tâm đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \quad (1)$$

Bước 2: Đồ thị hàm số nhận I(a, b) làm tâm đối xứng

$\Leftrightarrow$ hàm số (1) là hàm số lẻ $\Leftrightarrow$ ***tham số***

Bước 3: Kết luận.

Bài toán 3: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng qua điểm I(a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy hai điểm $A(x_A, y(x_A))$ và $B(x_B, y(x_B))$ thuộc đồ thị hàm số.

Bước 2: Hai điểm A và B đối xứng qua điểm I(a, b)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ y_A + y_B = 2b \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ A và B.}$$

Bài toán 4: Tìm phương trình đường cong đối xứng với (C): $y=f(x)$ qua điểm $I(x_0, y_0)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: **Gọi (H) là đường cong đối xứng với (C) qua điểm $I(x_0, y_0)$.**

Bước 2: **Khi đó, với mỗi $M(x, y)\in(H)$**

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1)\in(C)$ **sao cho M đối xứng với M_1 qua I**

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ **thoả mãn:**

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ x_1 + x = 2x_0 \\ y_1 + y = 2y_0 \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3: **Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường cong (H).**

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm $I(1, -1)$ làm tâm đối xứng.

Giải.

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng:

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow Y = X^3 - 3X \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm $I(1, -1)$ làm tâm đối xứng.

***Chú ý*: Đồ thị hàm số bậc ba**

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

luôn nhận điểm $U(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm $I(1, 1)$ làm tâm đối xứng.

Giải.

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

chi đó hàm số có dạng:

$$Y + 1 = \frac{(X+1)+1}{(X+1)-1} \Leftrightarrow Y = \frac{(X+1)+1}{(X+1)-1} - 1 \Leftrightarrow Y = \frac{2}{X} \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(1, 1) làm tâm đối xứng.

***Chú ý*: Đồ thị hàm số**

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ với } c \neq 0,\ D = ad - bc \neq 0$$

uôn nhận điểm $I(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 3: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 2}$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm I(2, 2) làm tâm đối xứng.

Giải.

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

chi đó hàm số có dạng:

$$Y + 2 = \frac{(X+2)^2 - 2(X+2) - 2}{(X+2) - 2} \Leftrightarrow Y = \frac{X^2 + 2X - 2}{X} - 2 \Leftrightarrow Y = \frac{X^2 - 2}{X} \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(2, 2) làm tâm đối xứng.

***Chú ý*: Đồ thị hàm số**

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \text{ với } a, d \neq 0$$

uôn nhận điểm $I(-\frac{e}{d}, f(-\frac{e}{d}))$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 4: (Đề 76): Cho hàm số:

$$y = -\frac{1}{m}x^3 + 3mx^2 - 2$$

Xác định m để đồ thị hàm số nhận điểm I(1, 0) làm tâm đối xứng.

Giải.

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng :

$$Y = -\frac{1}{m}(X+1)^3 + 3m(X+1)^2 - 2 \text{ là hàm lẻ.}$$

Ta có:

$$Y = -\frac{1}{m}(X+1)^3 + 3m(X+1)^2 - 2$$

$$= -\frac{1}{m}X^3 + 3(m-\frac{1}{m})X^2 + 3(2m-\frac{1}{m})X + 3m - \frac{1}{m} - 2 \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-\frac{1}{m}) = 0 \\ 3m - \frac{1}{m} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 đồ thị hàm số nhận điểm I(1, 0) là tâm đối xứng.

Ví dụ 5: (Đề 18): Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x+1}$$

Xác định m để đồ thị của hàm số có hai điểm đối xứng với nhau qua gốc toạ độ

Giải.

Hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số có dạng :

$$A(x_A, \frac{x_A^2 + 2m^2x_A + m^2}{x_A + 1})$$

$$B(x_B, \frac{x_B^2 + 2m^2x_B + m^2}{x_B + 1})$$

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 0 & (1) \\ \dfrac{x_A^2 + 2m^2x_A + m^2}{x_A + 1} + \dfrac{x_B^2 + 2m^2x_B + m^2}{x_B + 1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(2m^2 - 1)x_A = m^2$ (3)

Để tồn tại hai điểm A và B thì phương trình (3) phải có nghiệm.

Do $0 < x_A^2 \neq 1$ nên:

$$0 < \frac{m^2}{2m^2 - 1} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} < m \neq 1 \\ -1 \neq m < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty) \setminus \{-1, 1\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

du 6: (ĐHQG – 95): Cho hàm số:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x-2}.$$

Tìm phương trình đường cong đối xứng với đồ thị (C) qua điểm I(1, 1).

Giải

Gọi (H) là đường cong đối xứng với (C) qua điểm I(1, 1).

Khi đó, với mỗi M(x, y)∈(H)

$$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1)\in(C) \text{ với } y_1 = \frac{(x_1-1)^2}{x_1-2} \qquad (1)$$

và M đối xứng với M_1 qua điểm I(1, 1) $\Leftrightarrow$ x_1, y_1 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x = 2 \\ y_1 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x \\ y_1 = 2 - y \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$y = \frac{x^2+1}{x}.$$

Vậy, đường cong (H) có phương trình : $y = \frac{x^2+1}{x}$.

I. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

i tập 1: Đồ thị hàm số:

$$y = x^3 - 6x^2 + 1$$

ận điểm I nào làm tâm đối xứng :

a. (0, 1). b. (1, 0). c. Kết quả khác.

i tập 2: Đồ thị hàm số:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

ận điểm I nào làm tâm đối xứng :

a. (2, 1). b. (1, 2). c. Kết quả khác.

i tập 3: Cho hàm số:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm $U(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ làm tâm đối xứng.

i tập 4: Đồ thị hàm số:

$$y = \frac{x}{x+1}$$

ận điểm I nào làm tâm đối xứng :

a. (1, 1). b. (−1, 1). c. Kết quả khác.

i tập 5: Cho hàm số:

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ với } c \neq 0,\ D = ad - bc \neq 0$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm $I(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ làm tâm đối xứng.

Bài tập 6: Đồ thị hàm số:

$$y = x - \frac{1}{x+1}$$

nhận điểm I nào làm tâm đối xứng :

a. $(-1, -1)$. b. $(1, -1)$. c. Kết quả khác.

Bài tập 7: Cho hàm số:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \text{ với } a, d \neq 0$$

CMR đồ thị hàm số nhận điểm $I(-\frac{e}{d}, f(-\frac{e}{d}))$ làm tâm đối xứng.

Bài tập 8: Cho hàm số:

$$y = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x - 2}.$$

Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm I(2, 1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 9: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 4mx + 5m}{x - 2} \ (C_m).$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt xứng nhau qua gốc toạ độ.

Bài tập 10: Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2 \ (C_m).$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt xứng nhau qua gốc toạ độ.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Đồ thị hàm số nhận điểm I(0, 1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 2: Đồ thị hàm số nhận điểm I(1, 2) làm tâm đối xứng.

Bài tập 4: Đồ thị hàm số nhận điểm I(−1, 1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 6: Đồ thị hàm số nhận điểm I(−1, −1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 8: Với $m = -3$.

Bài tập 9: Với $m < 0 \vee \frac{1}{2} < m \neq \frac{4}{3}$.

Bài tập 10: Với $m < -1 \vee 0 < m < 1$.

CHỦ ĐỀ 6

HÀM SỐ BẬC NHẤT

KIẾN THỨC CƠ BẢN

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Cho hàm số

$y = ax + b$, với x là biến số, a và b là các hằng số.

- Nếu $a = 0$, ta được $y = b$ được gọi là hàm hằng và có đồ thị là đường thẳng song song với Ox, cắt Oy tại điểm D(0, b).
- Nếu $a \neq 0$ thì $y = ax + b$ được gọi là hàm số bậc nhất.

ài toán: Hàm số bậc nhất

$y = ax + b$, với $a \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

ền xác định: D = R

biến thiên: là hàm số đơn điệu.

Cụ thể:

- Với $a > 0$, hàm số đồng biến.
- Với $a < 0$, hàm số nghịch biến.

Bảng biến thiên:

Với $a > 0$

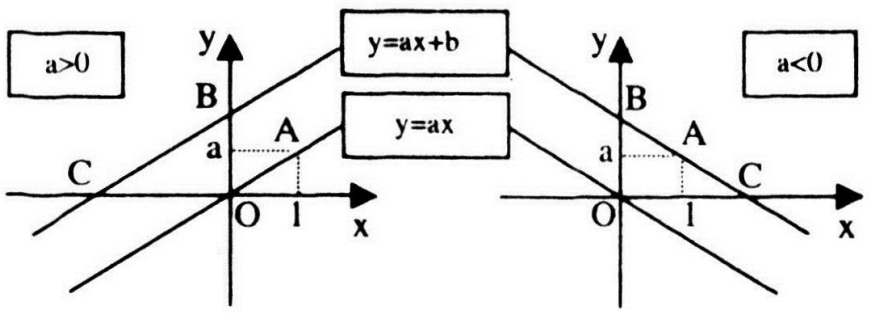
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Với $a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

thị: đồ thị của hàm bậc nhất là một đường thẳng (d), do đó chỉ cần xác định hai ểm bất kỳ thuộc (d) ta sẽ có được đồ thị của (d).

- Nếu $b = 0$, đồ thị của (d) đi qua gốc toạ độ O và điểm A(1, a).
- Nếu $b \neq 0$, đồ thị của (d) đi qua hai điểm B(0, b) và $C(-\frac{b}{a}, 0)$.



số góc: hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng (d).

Chú ý:

1. Điểm $A(x_0, y_0) \in (d)$: $y = ax + b \Leftrightarrow y_0 = ax_0 + b$.
2. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

(d_1): $y = a_1x + b_1$ với $a_1 \neq 0$,

(d_2): $y = a_2x + b_2$ với $a \neq 0$.

Để xét vị trí tương đối của (d_1) và (d_2), ta xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases} \Rightarrow a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \quad (*)$$

- Nếu (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1) // (d_2)$.

Vậy điều kiện để $(d_1) // (d_2)$ là:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

- Nếu (*) luôn đúng $\Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$.

Vậy điều kiện để $(d_1) \equiv (d_2)$ là:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

- Nếu (*) có nghiệm $x = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \Rightarrow y = a_1 \cdot \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}$.

Khi đó ta kết luận $(d_1) \cap (d_2) = \{I(\dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2})\}$.

Vậy điều kiện để (d_1) cắt (d_2) là:

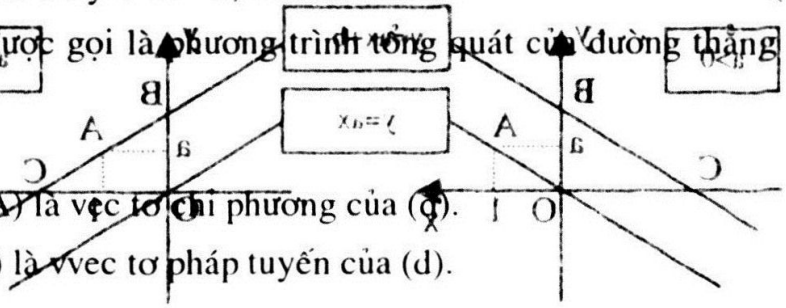
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

2. ĐƯỜNG THẲNG TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Mọi đường thẳng (d) trong hệ toạ độ Oxy đều có dạng

$$(d): Ax + By + C = 0, \text{ với } A^2 + B^2 \neq 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng (d) trong mặt phẳng.



Từ (1), ta có:

- Vectơ $\vec{a}(-B, A)$ là vec tơ chỉ phương của (d).
- Vectơ $\vec{n}(A, B)$ là vec tơ pháp tuyến của (d).
- Số $k = -\dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$ là giá trị hệ số góc của (d).

Ta xét các trường hợp đặc biệt sau:

1. Khi $A \neq 0$ và $B \neq 0$

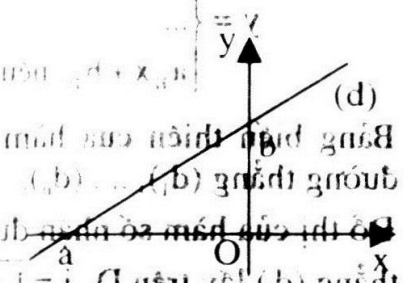
Đường thẳng (d) là một đường xiên, các đoạn a, b bị nó chắn trên các trục, hệ số góc k, khoảng cách h từ O tới (d), $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ với α là góc tạo bởi đường thẳng (d) với hướng dương của trục Ox, được biểu diễn qua các hệ số A, B, C như sau:

$$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B},$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{B},$$

$$h = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

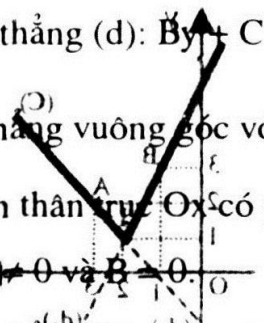
$$\cos\alpha = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ \sin\alpha = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



2. Khi $A = 0$ và $B \neq 0$.

Đường thẳng (d): $By + C = 0 \Leftrightarrow$ (d): $y = -\frac{C}{B}$

là đường thẳng vuông góc với Oy, cắt Oy tại điểm có tung độ $-\frac{C}{B}$.



Lưu ý: Bản thân trục Ox có phương trình $y = 0$.

3. Khi $A \neq 0$ và $B = 0$.

Đường thẳng (d): $Ax + C = 0 \Leftrightarrow$ (d): $x = -\frac{C}{A}$

là đường thẳng vuông góc với Ox, cắt Ox tại điểm có hoành độ $-\frac{C}{A}$.

Lưu ý: Bản thân trục Oy có phương trình $x = 0$.

I. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số:

(d): $y = x - 2$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (d).

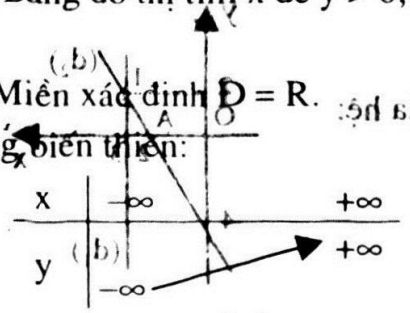
b. Bằng đồ thị tìm x để $y > 0$, $y \leq 0$.

Giải

a. Miền xác định $D = R$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$		$+\infty$



Đồ thị: ta lấy điểm A(0, 2), B(−2, 0).

b. Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
- $y \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$.

Chú ý: Với hàm số được cho bởi hệ:

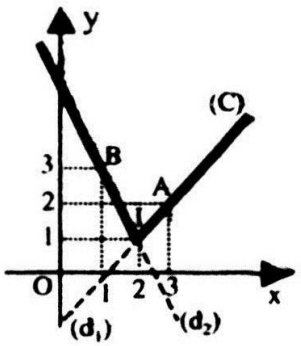
$$y = \begin{cases} a_1 x + b_1 & \text{nếu } x \in D_1 \\ \ldots & \\ a_n x + b_n & \text{nếu } x \in D_n \end{cases}$$

- Bảng biến thiên của hàm số nhận được thông qua sự biến thiên của các đường thẳng $(d_1), \ldots, (d_n)$.
- Đồ thị của hàm số nhận được bằng việc ghép các phần đồ thị của các đường thẳng (d_i) lấy trên D_i, $i = \overline{1, n}$.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

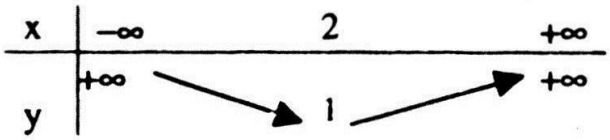
$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \ge 2 \\ 5 - 2x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Giải.



Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:



Đồ thị: Đồ thị hàm số gồm hai phần:

- Phần của đường thẳng (d_1): $y = x - 1$ lấy với $x \ge 2$, để có đồ thị (d_1) ta lấy thêm điểm A(3, 2).
- Phần của đường thẳng (d_2): $y = 5 - 2x$ lấy với $x < 2$, để có đồ thị (d_2) ta lấy thêm điểm B(1, 3).

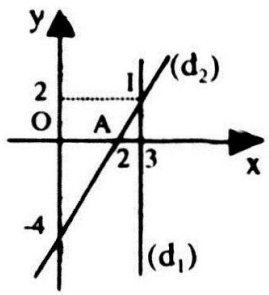
Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng:

(d_1): $x = 3$,

(d_2): $y = 2x - 4$.

Tìm toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2), rồi vẽ đồ thị của hai đường thẳng trên cùng một hệ trục toạ độ.

Giải.



Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(3, 2)\}$.

- Đồ thị của (d_1) là đường thẳng qua I và song song với Oy.
- Để vẽ đồ thị của (d_2) ta lấy thêm điểm A(2, 0).

Chú ý: Với bài toán về sự đồng quy của ba đường thẳng

(d_1): $y = a_1x + b_1$,

(d_2) : $y = a_2x + b_2$,

(d_3) : $y = a_3x + b_3$,

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng (d_1), (d_2), từ hệ:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ của I.}$$

Bước 2: Với yêu cầu :

- Để chứng minh (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy ta đi chứng minh $I \in (d_3)$.
- Để nhận được giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng quy ta thiết lập điều kiện $I \in (d_3)$.

Ví dụ 4: Cho ba đường thẳng:

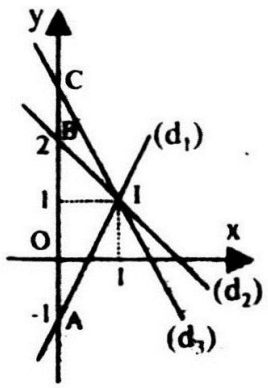
(d_1): $y = 2x - 1$,

(d_2): $y = 2 - x$.

(d_3): $y = ax + 3$.

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

Giải.



Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = \{I(1, 1)\}$.

Để (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy điều kiện là $I \in (d_3)$

$\Leftrightarrow 1 = a + 3 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy với $a = -2$ thì (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy và khi đó (d_3): $y = -2x + 3$.

- Để vẽ đồ thị của (d_1) ta lấy thêm điểm A(0, −1).
- Để vẽ đồ thị của (d_2) ta lấy thêm điểm B(0, 2).
- Để vẽ đồ thị của (d_3) ta lấy thêm điểm C(0, 3).

Ví dụ 5: Lập phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) đi qua hai điểm A(2, 4) và B(1, 1).

b. (d) đi qua điểm C(1, 2) và có hệ số góc bằng 1.

Giải.

a. Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng:

(d): $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$. (1)

Vì A(2, 4) và B(1, 1) thuộc (d), ta được:

$$\begin{cases} 2A + 4B + C = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3B \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3B \\ C = 2B \end{cases} \quad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

(d): $-3Bx + By + 2B = 0 \Leftrightarrow$ (d): $3x - y - 2 = 0$.

b. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 1 có phương trình:

(d): $y = x + b$.

Vì $C(1, 2) \in$ (d), ta được:

$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy đường thẳng (d): $y = x + 1$.

Ví dụ 6: Lập phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = 2x + 7$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

b. (d) vuông góc với đường thẳng (d_1): $y = 3x + 2$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

Giải.

a. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = 2x + 7$ có phương trình:

(d): $y = 2x + b$.

Vì (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, ta được:

$M(0, 1) \in$ (d) $\Leftrightarrow 1 = b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy đường thẳng (d): $y = 2x + 1$.

b. Đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng (d_1): $y = 3x + 2$ có phương trình:

(d): $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Vì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3, ta được:

$N(-3, 0) \in$ (d) $\Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Ví dụ 7: Cho hàm số

$$(d_m): y = (m - 1)x + 2m - 3.$$

a. Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.

b. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi (C_m) luôn đi qua 1 điểm cố định.

Giải.

a. Ta có:

- Hàm số là đồng biến

$$\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Hàm số là nghịch biến

$$\Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

- Hàm số là hàm hằng

$$\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

b. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó:

$$y_0 = (m - 1)x_0 + 2m - 3, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2)m - x_0 - y_0 - 3 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(-2, -1)$.

Ví dụ 8: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): (m - 1)x + (2m - 3)y - m - 1 = 0.$$

1. Xác định m để:
   a. (d_m) đi qua $A(2, 1)$.
   b. (d_m) có hướng đi lên.
   c. $(d_m)//Ox$.
   d. (d_m) vuông góc với đường thẳng (Δ_1): $3x + 2y - 100 = 0$.
   e. (d_m) song song với đường thẳng (Δ_2): $x - 2y + 12 = 0$.
2. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Giải.

1. Ta lần lượt có:

   a. (d_m) đi qua $A(2, 1)$

$$\Leftrightarrow 2(m - 1) + (2m - 3) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

   b. (d_m) có hướng đi lên $\Leftrightarrow$ hệ số góc $k > 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m-3} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m-1>0 \\ 2m-3<0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m-1<0 \\ 2m-3>0 \end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m>1 \\ m<3/2 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m<1 \\ m>3/2 \end{cases}\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

   c. $(d_m)//Ox$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 2m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

   d. (d_m) vuông góc với đường thẳng (Δ_1): $3x - 2y - 100 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 3.$$

   e. (d_m) song song với đường thẳng (Δ_2): $x - 2y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

2. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó:

$(m-1)x_0 + (2m-3)y_0 - m - 1 = 0$, với $\forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0 - 1)m - x_0 - 3y_0 - 1 = 0$, với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \\ x_0 + 3y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -2 \end{cases}.$$

Vậy (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(5, -2)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $x = 2$.

b. $y = -5$.

c. $y = 2x + 4$.

d. $y = -2x + 6$.

e. $x - 2y + 4 = 0$.

f. $2x + 3y + 6 = 0$.

Bài tập 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a. $y = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq 0 \\ 3 - 2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$.

b. $y = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq 1 \\ 3 - x \text{ nếu } 0 < x < 1 \\ x + 3 \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}$.

Bài tập 3: Xác định giao điểm của hai đường thẳng và vẽ chúng trên cùng mặt hẳng toạ độ, biết:

a. $y = 3$ và $y = 5x - 2$. ☐ (1, 3) ☐ (2, 3) ☐ Khác

b. $y = -2x + 6$ và $x = 2$. ☐ (2, 1) ☐ (2, 2) ☐ Khác

c. $y = x + 2$ và $y = -3x + 6$. ☐ (1, 2) ☐ (2, 3) ☐ Khác

d. $y = -\frac{1}{2}x - 3$ và $x = -4$. ☐ (-4, 1) ☐ (-4, -1) ☐ Khác

e. $3x + 4y - 12 = 0$ và $x - 3y + 1 = 0$. ☐ (2, 1) ☐ (2, 2) ☐ Khác

Bài tập 4: Cho ba đường thẳng:

$$(d_1): y = x - 2,\ (d_2): y = a - 2x,\ (d_3): y = 3ax - 4.$$

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

a. $a = 2$. b. $a = 1$. c. Khác.

Bài tập 5: Lập phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) đi qua hai điểm A(1, 1) và B(3, 2).

☐ (d): $x + y - 2 = 0$. ☐ (d): $2x - y - 4 = 0$.

☐ (d): $x - 2y + 1 = 0$. ☐ Khác.

b. (d) đi qua điểm C(-1, 2) và có hệ số góc bằng 3.

☐ (d): $3x - y - 2 = 0$. ☐ (d): $3x - y + 5 = 0$.

☐ (d): $x + 2y - 3 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Lập phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -x + 4$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

☐ (d): $x + y + 1 = 0$. ☐ (d): $x + y - 1 = 0$.

☐ (d): $2x + 2y + 1 = 0$. ☐ Khác.

b. (d) vuông góc với đường thẳng (d_1): $y = -x + 3$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

☐ (d): $x - y - 2 = 0$. ☐ (d): $x - y + 2 = 0$.

☐ (d): $x - y - 2 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $y = x - 2$,

(d_2): $y = -2x + 1$.

a. Trên cùng mặt phẳng toạ độ vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Xác định giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng qua I và song song với đường thẳng (Δ_1): $3x + y = 0$. Vẽ các đường thẳng này.

☐ $3x + y + 1 = 0$. ☐ $3x - 2y - 1 = 0$.

☐ $3x + y - 2 = 0$. ☐ Khác.

c. Viết phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với đường thẳng (Δ_2): $x + 2y = 0$. Vẽ các đường thẳng này.

☐ (d): $x + 2y + 1 = 0$. ☐ $2x + y - 1 = 0$.

☐ (d): $2x - y - 3 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $x + 3y - 9 = 0$,

(d_2): $3x - 2y - 5 = 0$.

a. Tìm toạ độ giao điểm A của (d_1) và (d_2). Vẽ hình.

☐ A(0, 3). ☐ A(3, 2). ☐ Khác.

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và qua điểm B(2, 4).

☐ $2x + y - 8 = 0$. ☐ $x + y - 6 = 0$. ☐ Khác.

c. Gọi C là giao điểm của (d_1) với trục tung. Chứng minh rằng ΔABC vuông cân.

Bài tập 9: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): (m + 1)x + 2my - 3m + 1 = 0.$$

1. Xác định m để:

a. (d_m) đi qua A(2, −3).

☐ $m = 2$. ☐ $m = 3/7$. ☐ Khác.

b. (d_m) có hướng đi lên.

☐ $-1 < m < 0$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ Khác.

c. (d_m) có hướng đi xuống.

☐ $m > 0$. ☐ $m < -1$. ☐ Khác.

d. $(d_m)//Ox$.

☐ $m = -2$. ☐ $m = -1$. ☐ Khác.

e. $(d_m)//Oy$.

☐ $m = 0$. ☐ $m = 13$. ☐ Khác.

f. (d_m) vuông góc với đường thẳng (Δ_1): $3x - 4y - k = 0$.

☐ $m = 3/5$. ☐ $m = 5/3$. ☐ Khác.

g. (d_m) song song với đường thẳng (Δ_2): $3x - 2y + 12 = 0$.

☐ $m = 1/4$. ☐ $m = -1/4$. ☐ Khác.

2. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Bài tập 10: Cho các họ đường thẳng

$$(d_m): 2(m - 1)x + y - 2 = 0$$

$$(\Delta_m): (m + 2)x + (m - 1)y - 3 = 0$$

a. Tìm m để (d_m) cắt (Δ_m).

☐ $m \neq 0$. ☐ $m \neq 5/2$. ☐ Khác.

b. Tìm m để $(d_m) \perp (\Delta_m)$.

☐ $m = 1$. ☐ $m = -5/2$. ☐ Khác.

c. Tìm m để $(d_m)//(\Delta_m)$.

☐ $m = 5/2$. ☐ $m = 0$. ☐ Khác.

d. Tìm m để $(d_m) \equiv (\Delta_m)$.

☐ $m = 1$. ☐ $m = 5/2$. ☐ Khác.

e. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

☐ A(0, 2). ☐ A(2, 0). ☐ Khác.

f. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (Δ_m).

☐ B(-1, 1). ☐ B(1, -1). ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4: a = 1.

Bài tập 5:

a. (d): $x - 2y + 1 = 0$.

b. (d): $3x - y + 5 = 0$.

Bài tập 6:

a. (d): $x + y - 1 = 0$.

b. (d): $x - y - 2 = 0$.

Bài tập 7:

a. (d): $3x + y - 2 = 0$.

b. (d): $2x - y - 3 = 0$.

Bài tập 8:

a. A(3, 2).

b. $2x + y - 8 = 0$.

c. Toạ độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 3).$$

Khi đó $AB^2 = 5$, $BC^2 = 5$, $CA^2 = 10$, suy ra ΔABC vuông cân tại B.

Bài tập 9:

1. a. $m = \frac{3}{7}$.

1. b. $-1 < m < 0$.

1. c. $m > 0 \vee m < -1$.

1. d. $m = -1$.

1. e. $m = 0$.

1. f. $m = \frac{3}{5}$.

1. g. $m = -\frac{1}{4}$.

2. Điểm cố định M(−1, 2).

Bài tập 10:

a. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{5}{2}$.

b. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$.

c. $m = 0$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.

d. $m = \frac{5}{2}$.

e. Gọi $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua

$\Leftrightarrow 2(m-1)x_0 + y_0 - 2 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow 2mx_0 - 2x_0 + y_0 - 2 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 0 \\ -2x_0 + y_0 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(0, 2).$

f. Tương tự như trên ta được điểm cố định $B(1, -1)$.

CHỦ ĐỀ 7
HÀM SỐ BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÀM SỐ BẬC HAI

Cho hàm số

$y = ax^2 + bx + c$, với x là biến số, a, b và c là các hằng số.

- Nếu $a \neq 0$ thì $y = ax^2 + bx + c$ được gọi là hàm số bậc hai.

Bài toán 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc hai

$y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Miền xác định: D = R

Sự biến thiên: Để xét sự biến thiên ta biến đổi biểu thức của hàm bậc hai như sau:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Bảng biến thiên:

<u>Với a > 0</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

Vậy:

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Khi $x = -\frac{b}{2a}$ hàm số đạt cực tiểu

$$y_{min} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

<u>Với a < 0</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Vậy:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Khi $x = -\frac{b}{2a}$ hàm số đạt cực đại

$$y_{max} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Đồ thị: đồ thị của hàm bậc hai là một Parabol (P) có đỉnh $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ và nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng. Thật vậy:

Bằng phép tịnh tiến về gốc $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, *công thức :*

$$\begin{cases} x = X - b/2a \\ y = Y - \Delta/4a \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình $y = ax^2 + bx + c$ *ta được:*

$$Y - \frac{\Delta}{4a} = a\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2a}\right) + c \Leftrightarrow Y = aX^2$$

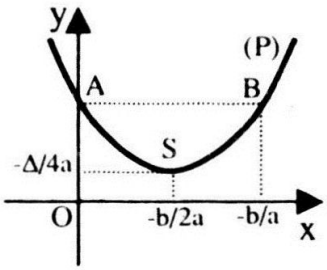
Hàm số này là hàm chẵn.

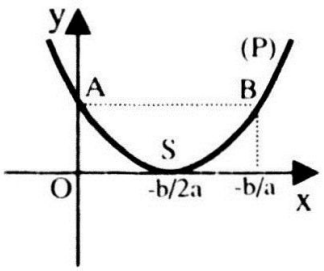
Để vẽ đồ thị:

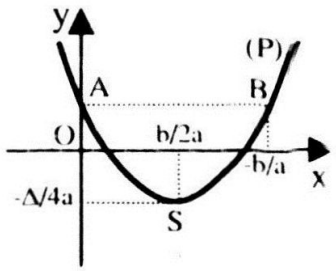
- Lấy ba điểm chủ đạo gồm đỉnh S và hai điểm A, B đối xứng với nhau qua S
- Giao của (P) với hai trục toạ độ.

Ta có các trường hợp:

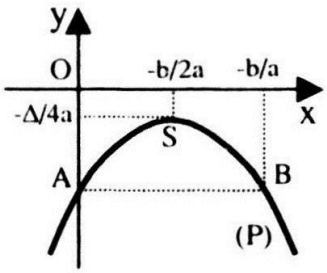
- Với a > 0

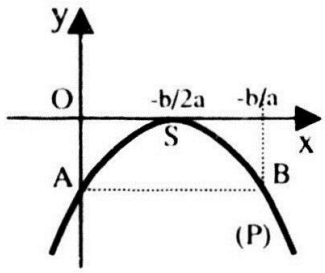


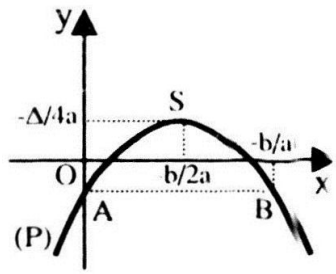




- Với a < 0







Nhận xét chung:

- Δ > 0 Parabol cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- Δ = 0 Parabol tiếp xúc với trục hoành.
- Δ < 0 Parabol không cắt trục hoành.

2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH PARABOL

Bài toán 2: Lập phương trình Parabol (P) thoả mãn điều kiện K

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

ước 2: Dựa vào điều kiện K để xác định a, b, c.

Trong bước này ta cần lưu ý các điều kiện thường gặp sau:

- Điểm $A(x_0, y_0) \in (P)$

$$\Leftrightarrow y_0 = a x_0^2 + b x_0 + c.$$

- (P) có đỉnh $S(x_0, y_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}.$$

- (P) có giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) bằng y_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \quad (\text{hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}).$$

- (P) đạt giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm có hoành độ bằng x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \quad (\text{hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}).$$

- (P) nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Bước 3: Kết luận.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số :

$$(P): y = x^2 - 4x + 2.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + 2 - m = 0.$$

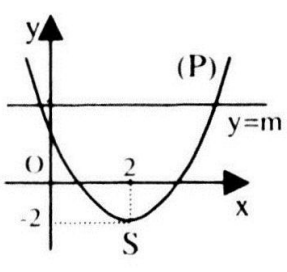
Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [0, 3)$.

Giải.

a. Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	CT -2	↗	$+\infty$



Đồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị A(0, 2), B(1, −1), C(3, −1).

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$x^2 - 4x + 2 = m$.

Khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (P) và đường t (d): $y = m$. Ta được:

- Với $m < -2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -2$, phương trình có một nghiệm $x = 2$.
- Với $m > -2$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Để phương trình có nghiệm $x \in [0, 3)$

$\Leftrightarrow -2 \le m < 2$.

Ví dụ 2: Cho hàm số :

(P): $y = 2x^2 - 2x$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (P). Bằng đồ thị tìm x để $y > 0$, $y \le 0$.

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số ngh của phương trình:

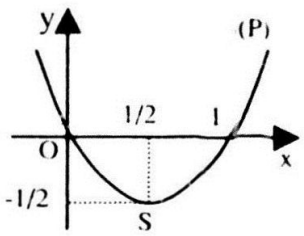
$2x^2 - 2x + 1 - m = 0$.

Giải.

a. Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$
y			$-1/2$		



Đồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị O(0, 0), B(1, 0).

Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$.
- $y \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$2x^2 - 2x = m - 1$.

Khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (P) và đường th (d): $y = m - 1$. Ta được:

- Với $m - 1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.
- Với $m - 1 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

ı 3: Cho hàm số

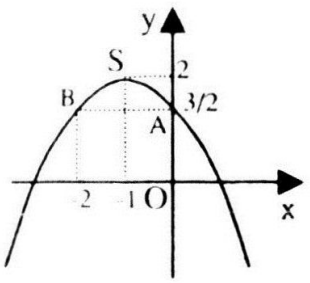
$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình:

$$x^2 + 2x + 2m + 1 = 0.$$

Giải.



Miền xác định D = R.

ıng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	CĐ 2	↘	$-\infty$

ồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị A$(0, \frac{3}{2})$, B$(-2, \frac{3}{2})$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = m + 2.$$

ıi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (P) và đường thẳng $= m + 2$. Ta được:

Với $m + 2 > 2 \Leftrightarrow m > 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$, phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Với $m + 2 < 2 \Leftrightarrow m < 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

ı 4: Cho hai hàm số (d) và (P), biết:

(d): $y = 5 - x$,

(P): $y = -x^2 - 4x + 3$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số (d) và (P) trên cùng một hệ trục toạ độ.

Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị vừa vẽ.

Giải.

Khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số (d) và (P).

ıảo sát hàm số (d): $y = 5 - x$

Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

Khảo sát hàm số (P_1): $y = -x^2 - 4x + 3$

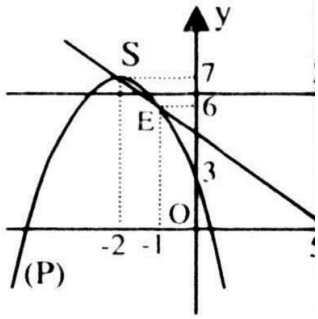
- Miền xác định D = R.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	↗	7 CĐ	↘	$+\infty$

- Đồ thị: Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm phương trình:

$5 - x = -x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.



Khi đó toạ độ các giao điểm là:

E(−1, 6) và F(−2, 7).

b. Từ đồ thị của (d) và (P), đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị

$\Leftrightarrow m \le 7$.

Ví dụ 5: (ĐHHH-98): Cho hai hàm số (P_1) và (P_2), biết:

(P_1): $y = -x^2 + 2x + 3$,

(P_1): $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục toạ

b. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị vừa vẽ.

Giải.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số (P_1) và (P_2).

Khảo sát (P_1): $y = -x^2 + 2x + 3$

- Miền xác định D = R.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y		CĐ	
	$-\infty$	4	$-\infty$

Khảo sát (P_1): $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$

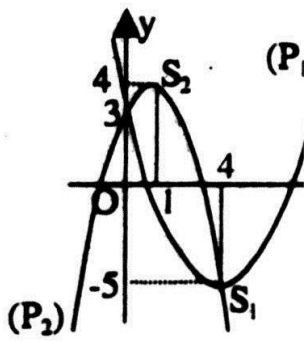
- Miền xác định D = R.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	−5	$+\infty$
		CT	

- Đồ thị: Hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm phương trình:

$-x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.



Khi đó toạ độ các giao điểm là:

E(0, 3) và F(4, −5).

b. Từ đồ thị của (P_1) và (P_2), đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị

$\Leftrightarrow -5 \le m \le 4$.

Ví dụ 6: Lập phương trình Parabol (P), biết rằng (P) đi qua 3 điểm A(1, 1), E C(0, 3).

Giải.

Giả sử Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=9 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=6 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = 2x^2 - 4x + 3$.

í dụ 7: Lập phương trình Parabol (P), biết rằng (P) có đỉnh S(1, 5) và đi qua ểm A(−1, 1).

Giải.

Giả sử Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

Vì (P) có đỉnh S(1, 5) và đi qua điểm A(−1, 1), ta được:

$$\begin{cases} 1 = -\dfrac{b}{2a} \\ 5 = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ a-b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 20a=-(b^2-4ac) \\ c=1-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=1-3a \\ a^2+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}.$$

Vậy Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = -x^2 + 2x + 4$.

í dụ 8: Lập phương trình Parabol (P), biết rằng (P) có giá trị cực tiểu bằng −1 i đi qua hai điểm A(2, −1), B(0, 3).

Giải.

Giả sử Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

- Vì (P) có giá trị cực tiểu bằng -1, ta được:

$$\begin{cases} a>0 \\ -1=-\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 4a=b^2-4ac \end{cases} \quad \text{(I)}$$

- Vì (P) đi qua hai điểm A(2, −1), B(0, 3), ta được:

$$\begin{cases} 4a+2b+c=-1 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2a \\ c=3 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Thay (II) vào (I), ta được:

$$\begin{cases} a>0 \\ 4a=(-2-2a)^2-12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a^2-2a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}.$$

Vậy Parabol (P) có phương trình:

(P): $y = x^2 - 4x + 3$.

í dụ 9: Cho hàm số

(P_m): $y = (1+m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 0 (tương ứng là (P_0)). Bằng đồ thị tìm x để $y \geq 0$, $y \leq 0$.

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua đỉnh của (P_0) và giao điểm của (P_0) với Oy.

c. Xác định m để (P_m) là Parabol. Tìm quĩ tích đỉnh của Parabol (P_m) khi m thay đổi.

d. Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm toạ độ điểm cố định đó.

Giải.

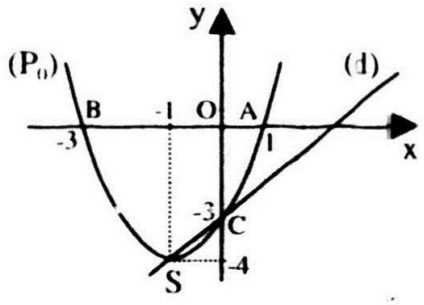
a. Với m = 0 ta được:

$$(P_0): y = x^2 + 2x - 3$$

Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	CT -4	↗	$+\infty$



Đồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị A(1, 0), B(−3, 0), C(0, −3).

Từ đồ thị suy ra:

- $y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{bmatrix}$.
- $y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

b. Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 > 0. \quad (1)$$

Vì S(−1, −4) và C(0, −3) thuộc (d), ta được:

$$\begin{cases} -A - 4B + C = 0 \\ -3B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A - 4B + 3B = 0 \\ C = 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 3B \end{cases}. \quad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$(d): -Bx + By + 3B = 0 \Leftrightarrow (d): x - y - 3 = 0.$$

c. Để (P_m) là Parabol điều kiện là

$$1 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1,$$

khi đó (P_m) có đỉnh $S_m\left(\frac{m-1}{m+1}, \frac{4}{m+1}\right)$.

Để nhận được phương trình quĩ tích đỉnh của Parabol (P_m) khi m thay đổi, ta thực hiện việc khử m từ hệ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m-1}{m+1} \\ y = \dfrac{4}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-1}{m+1} \\ m = \dfrac{4-y}{y} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\frac{4-y}{y} - 1}{\frac{4-y}{y} + 1} \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0.$$

Vậy quĩ tích đỉnh S_m là đường thẳng (Δ): $2x + y - 2 = 0$.

d. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua, khi đó:

$$y_0 = (1 + m)x_0^2 - 2(m - 1)x_0 + m - 3, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 2x_0 + 1)m + x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy (P_m) luôn đi qua điểm cố định M(1, 0).

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hàm số:

$$(P): y = x^2 + 2x - 3.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2x - 3 + m = 0$$

Bài tập 2: Cho hàm số:

$$(P): y = -2x^2 + 5x - 3$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình

- $-2x^2 + 5x - m = 0.$
- $2x^2 - 5x + m - 1 = 0$

Bài tập 3: Cho hàm số:

$$(P): y = -x^2 + 2x + 3.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2x + m = 0.$$

c. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [-1, 1]$.

☐ $1 \le m \le 3$. ☐ $-3 \le m \le 1$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho hàm số:

$$(P): y = mx^2 - 3x + n$$

a. Xác định m, n để Parbol có đỉnh là $S(-\frac{3}{2}, 1)$.

☐ $m = -1$ & $n = -5/4$. ☐ $m = -1$ & $n = -1$ ☐ Khác.

b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m, n tìm được ở câu a).

c. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua đỉnh S của Parbol và song song với đường thẳng $(\Delta): y = -2x + 1$.

☐ (d): $2x + y + 1 = 0$. ☐ (d): $2x + y + 2 = 0$. ☐ Khác.

d. Viết phương trình đường thẳng (d_1) đi qua giao điểm của Parbol với Oy và (d_1) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ I.

☐ $(d_1): x - y - 5 = 0$. ☐ $(d_1): 4x + 4y + 5 = 0$. ☐ Khác.

e. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của Parbol với Oy và (d_1) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.

Bài tập 5: Cho hàm số:

$$(P_m): y = (1 + m)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =1 (tương ứng là (P_1)). Bằng đồ th tìm x để $y \geq 0$, $y \leq 0$.

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của (P_0) với Oy và song song với đường thẳng $y = 3 - x$.

☐ (d): $x + y - 1 = 0$. ☐ (d): $x + y + 1 = 0$ ☐ Khác.

c. Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm toạ độ điểm cố định đó.

☐ M(−1, −2). ☐ M(−1, 2). ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho hàm số:

$$(P_m): y = x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4.$$

a. Xác định m để hàm số có giá trị nhỏ nhất y = 1.

☐ $m = -2$. ☐ $m = 2$. ☐ Khác.

b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên khi m = 2 (tương ứng là (P_2)).

c. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của (P_2) với Oy và (d) vuông góc với đường thẳng (d_1): $x + 2y = 10$.

☐ (d): $2x - y - 2 = 0$. ☐ (d): $2x - y + 2 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho hai hàm số:

$$(P): y = x^2 - 3x + 2,$$
$$(d): y = x + 2$$

b. Xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d).

☐ A(0, 2). ☐ B(4, 6). ☐ Cả A, B đều đúng.

c. Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ đồ thị của hai hàm số trên.

d. Viết phương trình đường thẳng qua đỉnh của Parbol và song song với đường thẳng $4x - 3y = 1$.

☐ $4x - 3y + 2 = 0$. ☐ $16x - 12y - 21 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho hai hàm số:

$$(P): y = x^2 + 2x - 3,$$
$$(d): y = 2x + 1.$$

a. Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị.

☐ A(2, 5). ☐ B(−2, −3). ☐ Khác.

b. Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ đồ thị của hai hàm số trên.

c. Viết phương trình đường thẳng đi qua đỉnh của (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

☐ $x + 2y + 9 = 0$. ☐ $2x + y + 6 = 0$. ☐ Khác.

d. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2x - 3 - 2m + 1 = 0.$$

Bài tập 9: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ 3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

b. $y = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 3 & \text{khi } x < 0 \\ x + 3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Bài tập 10: Lập phương trình của Parbol biết rằng

a. (P) đi qua ba điểm A(−1, 8); B(2, −1); C(1, 0).

☐ (P): $y = -x^2 + 4x + 3$. ☐ (P): $y = x^2 - 4x + 3$. ☐ Khác.

b. (P) có đỉnh S(2, 1) và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 7.

☐ (P): $y = 2x^2 - 8x + 7$. ☐ (P): $y = x^2 - 4x + 7$ ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3:

c $-3 \leq m \leq 1$.

Bài tập 4:

a. $m = -1$ và $n = -\frac{5}{4}$.

c. (d): $2x + y + 2 = 0$.

d. (d_1): $4x + 4y + 5 = 0$.

Bài tập 5:

b. (d): $x + y + 1 = 0$.

c. M(−1, −2).

Bài tập 6:

a. $m = 2$.

c. (d): $2x - y + 2 = 0$.

Bài tập 7:

a. Cả A, B đều đúng.

c. $16x - 12y - 21 = 0$.

Bài tập 8:

a. Cả A, B đều đúng.

c. $x + 2y + 9 = 0$.

Bài tập 10:

a. (P): $y = x^2 - 4x + 3$.

b. (P): $y = 2x^2 - 8x + 7$.

CHỦ ĐỀ 8

SƠ LƯỢC VỀ HÀM SỐ LUỸ THỪA

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số luỹ thừa

$y = ax^n$, với $a \neq 0$ và $n \in N^+$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các trường hợp đơn giản sau:

1. Với n = 1, ta được:

$$y = ax.$$

là phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm A(1, a).

2. Với n = 2 , ta được:

$$y = ax^2$$

là phương trình Parabol đỉnh O(0, 0).

3. Với n = 3 , ta được:

$$y = ax^3$$

- Miền xác định: D = R
- Bảng biến thiên

Với a>0

Với $x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow a x_1^3 < a x_2^3$

$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.

Vậy hàm số luôn đồng biến.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Với a<0

Với $x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow a x_1^3 > a x_2^3$

$\Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.

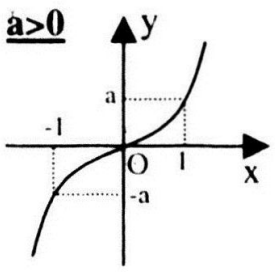
Vậy hàm số luôn nghịch biến

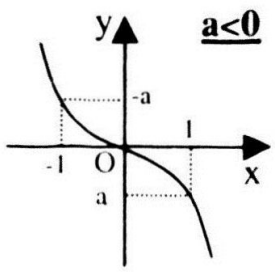
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

- Đồ thị:

- Vì 3 là số mũ lẻ, nên hàm $y = ax^3$ là một hàm lẻ. Vậy đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Bằng cách cho x một số giá trị, chẳng hạn x = 0, x = ±1, x = ±2,.... ta xác định được các điểm thuộc đồ thị hàm số.





4. Với n = 4 , ta được:

$$y = ax^4$$

- Miền xác định: D = R
- Bảng biến thiên

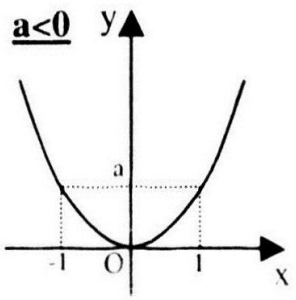
Với a>0	*Với a<0*
Với $0 < x_1 < x_2$	Với $0 < x_1 < x_2$
$\Leftrightarrow x_1^4 < x_2^4 \Leftrightarrow a x_1^4 < a x_2^4$	$\Leftrightarrow x_1^4 < x_2^4 \Leftrightarrow a x_1^4 > a x_2^4$
$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.	$\Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.
Hàm số đồng biến trên (0, +∞).	Hàm số nghịch biến trên (0, +∞).
Với $x_1 < x_2 < 0$	Với $x_1 < x_2 < 0$
$\Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow a x_1^4 > a x_2^4$	$\Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow a x_1^4 < a x_2^4$
$\Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.	$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.
Hàm số nghịch biến trên (−∞, 0).	Hàm số đồng biến trên (−∞, 0).
Ta có bảng biến thiên	Ta có bảng biến thiên

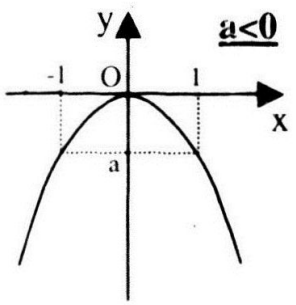
x	−∞		0		+∞
y	+∞	↘	0	↗	+∞

x	−∞		0		+∞
y	−∞	↗	0	↘	−∞

- Đồ thị:

- Vì 4 là số mũ chẵn, nên hàm $y = ax^4$ là một hàm chẵn. Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua Oy (nhận Oy làm trục đối xứng).
- Bằng cách cho x một số giá trị, chẳng hạn x = 0, x = ±1, x = ±2,... ta xác định được các điểm thuộc đồ thị hàm số.





Ghi chú: Không được gọi đồ thị hàm $y = ax^4$ là một Parabol; thuật ngữ Parabol là tên gọi của đồ thị hàm bậc hai.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = -x^3.$$

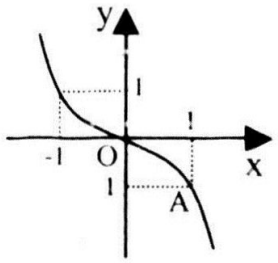
Giải.

Miền xác định: D = R

Bảng biến thiên

- Với $x_1<x_2$

$\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.



Vậy hàm số luôn nghịch biến.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

- Vì 3 là số mũ lẻ, nên hàm $y = -x^3$ là một hàm lẻ. Vậy đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Lấy các điểm O(0, 0), A(1, −1), ta nhận được đồ thị hàm số.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$y = x^3 - 1$.

Giải.

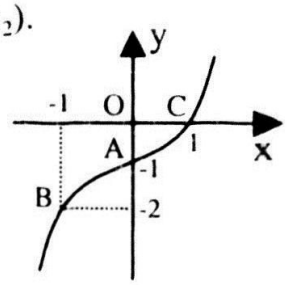
Miền xác định: D = R

Bảng biến thiên

- Với $x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.

Vậy hàm số luôn đồng biến.



Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị: Lấy các điểm A(0, −1), B(−1, −2), C(1, 0), ta nhận được đồ thị hàm số.

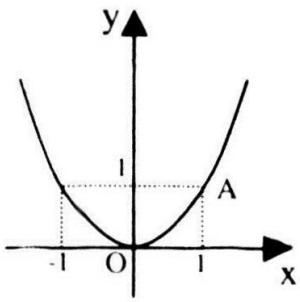
Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$y = x^4$.

Giải.

Miền xác định: D = R

Bảng biến thiên



- Với $0 < x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1^4 < x_2^4 \Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.

Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

- Với $x_1 < x_2 < 0$

$\Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

- Vì 4 là số mũ chẵn, nên hàm $y = x^4$ là một hàm chẵn. Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua Oy (nhận Oy làm trục đối xứng).
- Lấy các điểm O(0, 0), A(1, 1), ta nhận được đồ thị hàm số.

Ví dụ 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = 2 - x^4.$$

Giải.

Miền xác định: D = R

Bảng biến thiên

- Với $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow x_1^4 < x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4 > -x_2^4 \Leftrightarrow 2 - x_1^4 > 2 - x_2^4 \Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

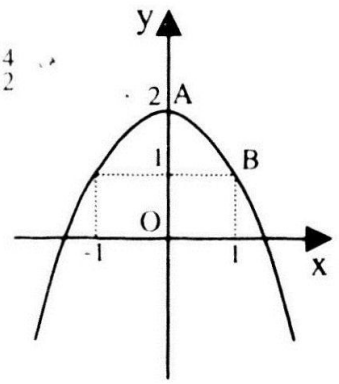
Hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

- Với $x_1 < x_2 < 0$

$$\Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4 < -x_2^4 \Leftrightarrow 2 - x_1^4 < 2 - x_2^4$$

$$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$.



Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

- Vì 4 là số mũ chẵn, nên hàm $y = 2 - x^4$ là một hàm chẵn. Vậy đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.
- Lấy các điểm A(0, 2), B(1, 1), ta nhận được đồ thị hàm số.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = x^3 - 4$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^3 - 4 + m = 0$.

b. $y = -\frac{1}{4}x^3 - 2$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^3 - 2m = 0$.

Bài tập 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = -\frac{1}{2}x^4$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^4 - 2 + 4m = 0$.

b. $y = x^4 - 4$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình $2x^4 - m = 0$.

CHỦ ĐỀ 9

SƠ LƯỢC VỀ HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$Y = \sqrt[n]{x}\ ,\ \text{với } n \in N \text{ và } n \geq 2.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các trường hợp đơn giản sau:

1. Với n = 2, ta được:

$$y = \sqrt{x}$$

Miền xác định: D = [0, +∞).

Bảng biến thiên

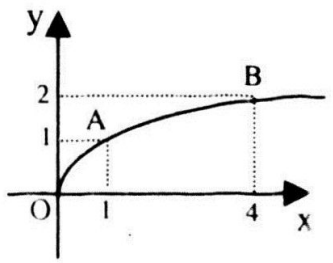
- Với $0 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên

x	−∞	0	+∞
y		0	+∞



Đồ thị : Bằng cách lấy các điểm O(0, 0), A(1, 1), B(4, 2) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

2. Với n = 3, ta được:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Miền xác định: D = R.

Bảng biến thiên

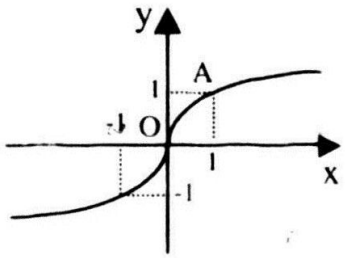
- Với $x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2} \Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên

x	−∞	+∞
y	-∞	+∞



Đồ thị :

- Vì hàm số là một hàm lẻ. Vậy đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Bằng cách lấy các điểm O(0, 0), A(1, 1) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

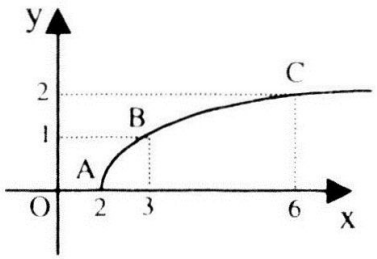
Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \sqrt{x-2}\ .$$

Từ đó tìm m để phương trình $\sqrt{x-2} = m$ có nghiệm thuộc [3, 6].

Giải.

Miền xác định: D = [2, +∞).



Bảng biến thiên

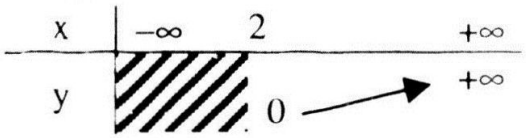
- Với $2 \le x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow 0 \le x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2}$

$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên



Đồ thị : Bằng cách lấy các điểm A(2, 0), B(3, 1), C(6, 2) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

Từ đồ thị suy ra điều kiện của m là $1 \le m \le 2$.

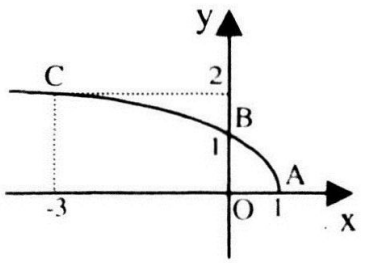
Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \sqrt{1-x}\ .$$

Từ đó tìm m để phương trình $\sqrt{1-x} = m$ có nghiệm thuộc (−3, 0].

Giải.

Miền xác định: D = (−∞, 1].



Bảng biến thiên

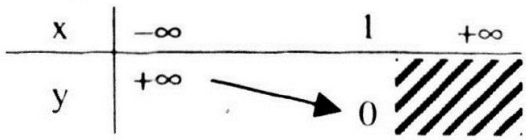
- Với $x_1 < x_2 \le 1$

$\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \ge -1 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên D.

Ta có bảng biến thiên



Đồ thị: Bằng cách lấy các điểm A(1, 0), B(0, 1), C(−3, 2) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

Từ đồ thị suy ra điều kiện của m là $1 \le m < 2$.

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \sqrt[3]{x-8}\,.$$

Từ đó tìm m để phương trình $\sqrt[3]{x-8} = m$ có nghiệm thuộc [0, 8].

Giải.

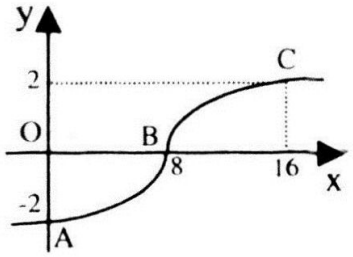
Miền xác định: D = R.

Bảng biến thiên

- Với $x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow x_1 - 8 < x_2 - 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1 - 8} < \sqrt[3]{x_2 - 8}$$

$$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2).$$



Vậy hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Đồ thị: Bằng cách lấy các điểm A(0, −2), B(8, 0), C(16, 2) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

Từ đồ thị suy ra điều kiện của m là $-2 \le m \le 0$.

Ví dụ 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = -\sqrt[3]{-x+1}\,.$$

Từ đó tìm m để phương trình $\sqrt[3]{-x+1} = m$ có nghiệm thuộc (1, 2).

Giải.

Miền xác định: D = R.

Bảng biến thiên

- Với $x_1 < x_2$

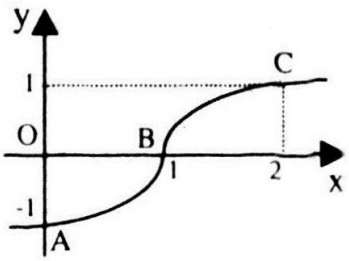
$$\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 - x_1} > \sqrt[3]{1 - x_2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[3]{1 - x_1} < -\sqrt[3]{1 - x_2} \Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$



Đồ thị: Bằng cách lấy các điểm A(0, −1), B(1, 0), C(2, 1) thuộc đồ thị hàm số, từ đó dựng được đồ thị hàm số.

Từ đồ thị suy ra điều kiện của m là $0 < m < 1$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \sqrt{-x}$.

b. $y = \sqrt{x+3}$, từ đó tìm m để phương trình $\sqrt{x+3} = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1, 5]$.

☐ $2 \le m \le 3$. ☐ $2 \le m \le 2\sqrt{2}$. ☐ Khác.

c. $y = -\sqrt{x+1}$, từ đó tìm m để phương trình $\sqrt{x+1} = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0, 8)$.

☐ $-3 < m \le -1$. ☐ $-1 \le m \le 1$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \sqrt[3]{-x}$.

b. $y = \sqrt[3]{x+1}$, từ đó tìm m để phương trình $\sqrt[3]{x+1} = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0, 7]$.

☐ $1 \le m \le 2$. ☐ $1 \le m < 2$. ☐ Khác.

c. $y = 2\sqrt[3]{2x-1}$, từ đó tìm m để phương trình $2\sqrt[3]{2x-1} = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1, 3]$.

☐ $1 \le m \le \sqrt[3]{5}$. ☐ $2 \le m \le 2\sqrt[3]{5}$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

b. $2 \le m \le 2\sqrt{2}$.

c. $-3 < m \le -1$.

Bài tập 2:

b. $1 \le m \le 2$.

c. $2 \le m \le 2\sqrt[3]{5}$.

CHỦ ĐỀ 10

SƠ LƯỢC VỀ HÀM PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

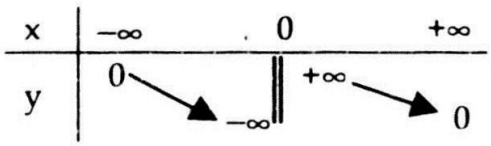
$$y = \frac{a}{x}, \text{ với } a \neq 0.$$

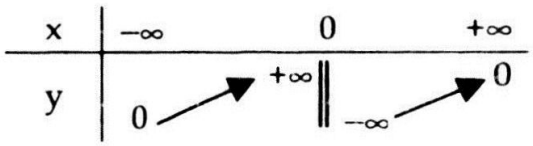
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Miền xác định: $D = R\backslash\{0\}$

Bảng biến thiên

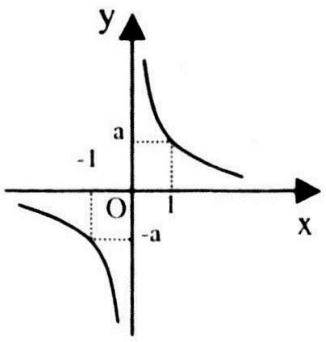
Với $a > 0$	*Với $a < 0$*
Với $x_1 < x_2$	Với $x_1 < x_2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{a}{x_1} > \frac{a}{x_2}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_2}$
$\Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2)$.	$\Leftrightarrow y(x_1) < y(x_2)$.
Vậy hàm số luôn nghịch biến.	Vậy hàm số luôn đồng biến.
Ta có bảng biến thiên	Ta có bảng biến thiên

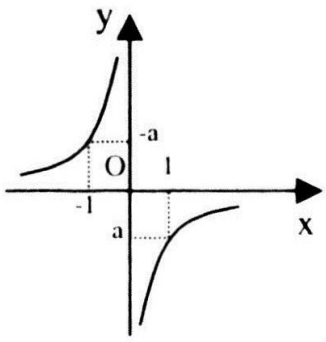




- Đồ thị:

- Vì hàm số $y = \frac{a}{x}$ là một hàm lẻ. Vậy đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Bằng cách cho x một số giá trị, chẳng hạn $x = \pm 1$, $x = \pm 2$,... ta xác định được các điểm thuộc đồ thị hàm số.

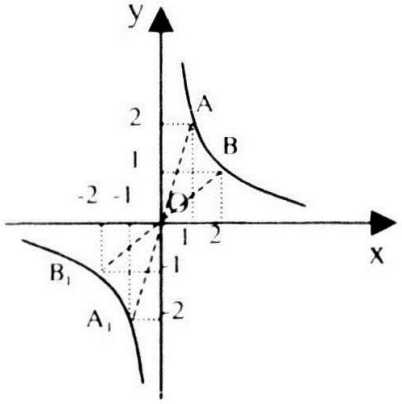




II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{2}{x}.$$



Giải.

Miền xác định: $D = R\backslash\{0\}$

Bảng biến thiên

Với $x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2} \Leftrightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

Vậy hàm số luôn nghịch biến.

Ta có bảng biến thiên

X	$-\infty$		0		$+\infty$
Y	0	$\searrow$	$-\infty$ | | $+\infty$	$\searrow$	0

Đồ thị:

- Vì hàm số $y = \frac{2}{x}$ là một hàm lẻ. Vậy đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Ta lấy các điểm A(1, 2), B(2, 1), từ đó nhận được đồ thị hàm số.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \frac{3}{x}$.

b. $y = -\frac{1}{x}$.

Bài tập 2: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \frac{2}{x-1}$.

b. $y = -\frac{1}{x+2}$.

Bài tập 3: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

b. $y = -\frac{x^2+2x}{x+1}$.

CHỦ ĐỀ 11
SƠ LƯỢC VỀ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị $y = |f(x)|$ gồm:

- Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của $y = f(x)$ qua trục hoành.

Bài toán 2. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases},$$

và $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy.

Do đó đồ thị $y = f(|x|)$ gồm:

- Phần bên phải Oy của đồ thị $y = f(x)$.
- Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Bài toán 3. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Từ đồ thị $y = f(x)$ để suy ra đồ thị $y = |f(|x|)|$ chúng ta thực hiện liên tiếp hai qui tắc I.2 và I.3. Cụ thể là:

Từ $y = f(x)$ suy ra $y = |f(x)| = g(x)$

và lại từ $y = g(x)$ suy ra $y = g(|x|) = |f(|x|)|$.

hoặc

Từ $y = f(x)$ suy ra $y = f(|x|) = h(x)$

và lại từ $y = h(x)$ suy ra $y = |h(x)| = |f(|x|)|$.

Bài toán 4. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |u(x)|.v(x)$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}.$$

Do đó để có được đồ thị hàm số $y=|u(x)|.v(x)$ trước hết ta vẽ đồ thị $y = f(x) = u(x).v(x)$ và từ đó đồ thị $y = |u(x)|.v(x)$ gồm:

- Phần từ đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) \geq 0$.
- Đối xứng phần từ đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) < 0$ qua trục hoành.

Bài toán 5. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $|y| = f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nhận xét rằng:

- Điểm (x_0, y_0) thuộc đồ thị $\Rightarrow$ điểm $(x_0, -y_0)$ cũng thuộc đồ thị, nên đồ thị nhận Ox làm trục đối xứng.
- Với $y \geq 0$ thì $|y| = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Do đó đồ thị $|y| = f(x)$ gồm:

- Phần đồ thị từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
- Đối xứng phần đồ thị trên qua trục hoành được nửa đồ thị còn lại.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x - 1|.$$

Giải.

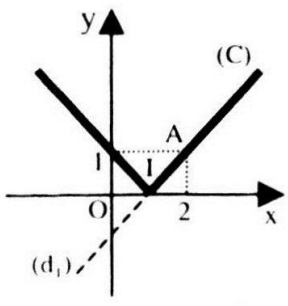
Viết lại hàm số dưới dạng:

$$(C): y = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Miền xác định $D = R$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Đồ thị: Đồ thị hàm số gồm hai phần:

- Phần của đường thẳng (d_1): $y = x - 1$ ở phía trên Ox, để có đồ thị (d_1) ta lấy thêm điểm A(2, 1).
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (d_1) qua trục hoành.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$(P): y = x^2 + 2x - 3.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tuỳ theo giá trị của m, hãy cho biết số nghiệm của phương trình

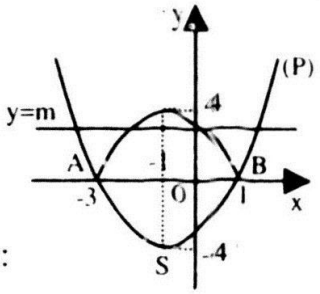
$$|x^2 + 2x - 3| = m. \quad (1)$$

Giải.

a. Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	CT -4	↗	$+\infty$



Đồ thị: ta lấy thêm hai điểm A(-3, 0), B(1, 0).

b. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$, gồm hai phần:

- Phần phía trên trục hoành của (P).
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (P) qua trục hoành.

Khi đó số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng y = m, ta được:

- Với $m < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 0 \vee m > 4$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với $0 < m < 4$, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.
- Với $m = 4$, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3: Cho hàm số:

$$(P): y = -x^2 + 2x$$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

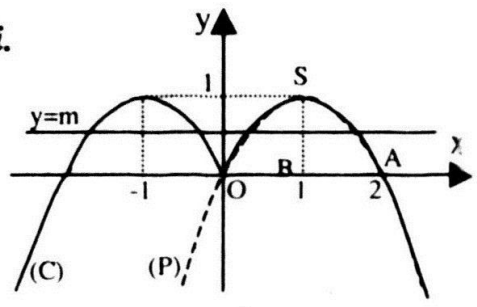
$$x^2 - 2|x| + m = 0.$$

Giải.

a. Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	CĐ 1	↘	$-\infty$



Đồ thị: ta lấy thêm hai điểm O(0, 0), A(2, 0).

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-x^2 + 2|x| = m.$$

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2|x|$, gồm hai phần:

- Phần phía bên phải Oy của (P).
- Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Khi đó số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và đường ẳng $y = m$, ta được:

- Với $m > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 1 \vee m < 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với $0 < m < 1$, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.
- Với $m = 0$, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

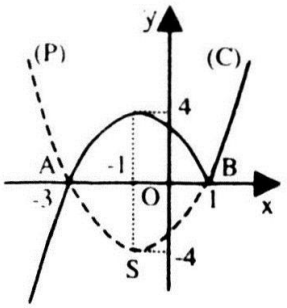
í dụ 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x - 1|(x + 3).$$

Giải.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$(C): y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$



Miền xác định D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị: Trước hết ta đi vẽ đồ thị của Parabol (P): $y = x^2 + 2x - 3$ có đỉnh $-1, -4)$ và lấy thêm hai điểm A(−3, 0), B(1, 0).

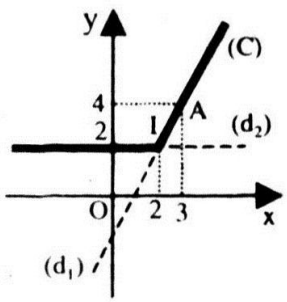
Đồ thị (C) gồm hai phần:

- Phần của Parabol (P) với $x \geq 1$.
- Đối xứng phần đồ thị của Parabol (P) với $x < 1$ qua Ox.

í dụ 5: Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x + |x - 2|.$$

Giải.



Viết lại hàm số dưới dạng:

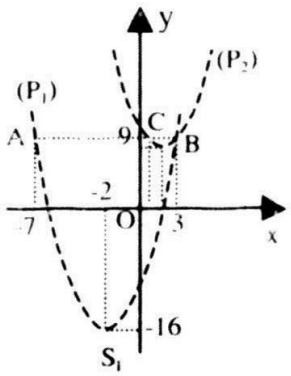
$$(C): y = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số gồm hai phần:

- Phần của đường thẳng (d_1): $y = 2x - 2$ lấy với $x \geq 2$, để có đồ thị (d_1) ta lấy thêm điểm A(3, 4).
- Phần của đường thẳng (d_2): $y = 2$ lấy với $x < 2$.

Ví dụ 6: Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x^2 + |4x - 12|.$$



Giải.

Viết lại hàm số dưới dạng:

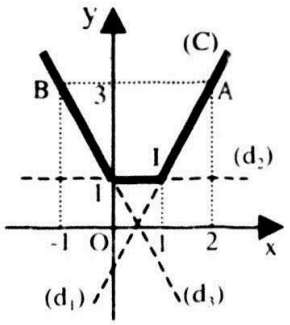
$$(C): y = \begin{cases} x^2 + 4x - 12 & \text{khi } x \geq 3 \\ x^2 - 4x + 12 & \text{khi } x < 3 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số gồm hai phần:

- Phần của Parabol (P_1): $y = x^2 + 4x - 12$ với $x \geq 3$, ta biết (P_1) có đỉnh $S_1(-2, -16)$ và lấy thêm hai điểm $A(-7, 9)$, $B(3, 9)$.
- Phần của Parabol (P_2): $y = x^2 - 4x + 12$ với $x < 3$, ta biết (P_2) có đỉnh $S_2(2, 8)$ và lấy thêm hai điểm $B(3, 9)$, $C(1, 9)$.

Ví dụ 7: Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x| + |x - 1|.$$



Giải.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$(C): y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 1 - 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số gồm ba phần:

- Phần của đường thẳng (d_1): $y = 2x - 1$ lấy với $x \geq 1$, để có đồ thị (d_1) ta lấy thêm điểm $A(2, 3)$.
- Phần của đường thẳng (d_2): $y = 1$ lấy với $0 < x < 1$.
- Phần của đường thẳng (d_3): $y = 1 - 2x$ lấy với $x \leq 0$, để có đồ thị (d_3) ta lấy thêm điểm $B(-1, 3)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = |x - 1|$, từ đó tìm m để phương trình $|x - 1| = m$ có hai nghiệm thoả mãn $x_1 < 0 < 2 < x_2 < 3$.

b. $y = |-2x + 5|$, từ đó tìm m để phương trình $|2x - 5| = m$ có hai nghiệm dương

Bài tập 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = |x| + |2x - 4|$, từ đó biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$|x| + |2x - 4| = m.$$

b. $y = 2x - 3|x - 1|$, từ đó biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$2x - 3|x - 1| = m.$$

c. $y = |2x - 1 + |x - 3|| - 2$, từ đó biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$|2x - 1 + |x - 3|| = m.$$

Bài tập 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = |x^2 - 3x + 2|$, từ đó tìm m để phương trình $|x^2 - 3x + 2| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

b. $y = x^2 + |-2x + 1|$, từ đó tìm m để phương trình $x^2 + |-2x + 1| = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

c. $y = |x^2 + 4x + 3| + |2x - 1|$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$|x^2 + 4x + 3| + |2x - 1| = m.$$

Bài tập 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = x^2 - 2|x| + 3$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$x^2 - 2|x| + m = 0.$$

b. $y = |x - 3|(x - 1)$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$|x - 3|(x - 1) = m.$$

Bài tập 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = \sqrt{|x|}$.

b. $y = \sqrt{|x - 2|}$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$\sqrt{|x - 2|} = m^2.$$

c. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

Bài tập 6: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = \sqrt[3]{|x - 8|}$.

b. $y = \sqrt[3]{|x| - 1}$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$\sqrt[3]{|x| - 1} = 2m.$$

Bài tập 7: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a. $y = \dfrac{2}{|x|}$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$\frac{2}{|x|} = m.$$

b. $y = \dfrac{2}{|x - 1|}$, từ đó biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$m|x - 1| = 2.$$

Bài tập 8: Cho hàm số

$$(P): y = 2x^2 - 3x + 1.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$|2x^2 - 3|x| + 1| = 2m - 1.$$

PHẦN III

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẬC NHẤT

CHƯƠNG I

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải và biện luận phương trình

$$ax + b = 0.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$ax = -b \quad (1)$$

a. Nếu $a = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0$.

- Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $a \neq 0$.

$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình:

$$m^2x + 6 = 4x + 3m.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - 4)x = 3m - 6. \quad (1)$$

a. Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Với $m = 2$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Vậy, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbf{R}$.

- Với $m = -2$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 0x = -12.$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq -2$

$$1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}.$$

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m+2}$.
- Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

Nhận xét: Trong ví dụ trên ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh hoạ trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số $a \neq 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.
- Hệ số $a = 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho b.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình:

$$m^2x + 1 = (m - 1)x + m.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - m + 1)x = m - 1. \qquad (1)$$

Ta có :

$$m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall m.$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{m-1}{m^2 - m + 1}.$$

Vậy với $\forall m$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m-1}{m^2 - m + 1}$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình:

$$m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 2 \\ m = 3 \end{bmatrix}.$$

Kết luận:

- Với $m = 2$ hoặc $m = 3$, phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $m \in R\backslash\{2, 3\}$, phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Trong trường hợp bài toán có nhiều tham số chúng ta cần khéo léo biện luận theo các tham số đó để vét cạn được các trường hợp.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x+a}{b-a}+\frac{x-a}{b+a}=\frac{2}{a^2-b^2}. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện $a \neq \pm b$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a+b)(x+a)+(a-b)(x-a)=2$$

$$\Leftrightarrow -bx=a^2+1$$

- Với $b=0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x=-\frac{a^2+1}{b}$.

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình:

$$a^2x=a(x+b)-b. \qquad (1)$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$a(a-1)x=b(a-1). \qquad (2)$$

a. Nếu $a(a-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$$

Với $a=0$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow 0x=-b$.

- Với $b=0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $a=1$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow 0x=0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

b. Nếu $a(a-1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right.$$

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $a=b=0$ hoặc $a=1$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

  Với $a=0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

- Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{b}{a}$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải và biện luận các phương trình:

a. $m^2(x + 1) = x + m$.

b. $(m + 1)^2x - m = (2m + 5)x + 2$.

Bài tập 2: Giải và biện luận các phương trình:

a. $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$.

b. $a(x - b) - 1 = b(1 - 2x)$.

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN CÓ NGHIỆM THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN K

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Phương trình bậc nhất một ẩn có nghiệm thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình:

$f(x, m) = 0.$ (1)

Giả sử điều kiện cho ẩn số (nếu cần) là K, khi đó ta có miền xác định D.

Biến đổi phương trình về dạng:

$ax = -b.$ (2)

Khi đó:

(i). Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \ \& \ b \neq 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \notin D \end{cases} \end{array}\right.$$

(ii). Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \in D \end{cases} \end{array}\right.$$

(iii). Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \in D \end{cases}$$

(iv). Phương trình (1) có nghiệm $\forall x \in D$

$\Leftrightarrow a = b = 0.$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp các em học lên trình bày đòi hỏi của bài toán thông qua các bước giải biện luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2. \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 2)x = 4 - m. \qquad (2)$$

a. Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

$(2) \Leftrightarrow 0x = 6$ (MT) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{4 - m}{m + 2}.$$

Do đó (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4 - m}{m + 2} = 1 \\ \dfrac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = -2 \vee m = 1$ phương trình (1) vô nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 2)x = 4 - m. \qquad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m + 2 = 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \dfrac{4 - m}{m + 2} = 1 \end{cases} \vee \dfrac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Tuy nhiên cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy nếu bài toán yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)* " tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x + 2}{x - m}. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện $x \neq 1 \wedge x \neq m$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$mx = 2 - m. \qquad (2)$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq 1 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \notin \{-2, 0, 1\}$.

Vậy với $m \notin \{-2, 0, 1\}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có tập hợp nghiệm là R

$$m(m^2x - 1) = 1 - x. \qquad (1)$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m^3 + 1)x = m + 1. \qquad (2)$$

Do đó (1) có tập hợp nghiệm là R

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với $m = -1$ phương trình (1) có tập hợp nghiệm là R.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{3x - m}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x-2}}. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện $x > 2$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m+1}{2}.$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\frac{3m+1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy với $m > 1$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{3m+1}{2}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}.$$

☐ $m \neq 0$. ☐ $m \neq -1$. ☐ Khác.

Bài tập 2. Xác định a, b để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$.

☐ $a \neq b$. ☐ $a \neq -b$. ☐ Khác.

Bài tập 3. Xác định m để phương trình sau có tập hợp nghiệm là R

$m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$.

☐ $m = 0$. ☐ $m = -2$. ☐ Khác.

Bài tập 4. Xác định a, b để phương trình sau có tập hợp nghiệm là R

$a(x - 1) + b(2x + 1) = x + 2$.

☐ $a = b = 1$. ☐ $a = -1$ & $b = 1$. ☐ Khác.

Bài tập 5. Xác định m để các phương trình sau vô nghiệm

a. $(m - 1)^2x = 4x + m + 1$.

☐ $m = 3$. ☐ $m = 1$. ☐ Khác.

b. $m^2(x - 1) = 2(mx - 2)$.

☐ $m = -2$. ☐ $m = 0$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1. $m \neq 0$ và $m \neq -1$.

Bài tập 2. $a \neq \pm b$

Bài tập 3. $m = 0$ hoặc $m = -2$.

Bài tập 4. $a = -1$ và $b = 1$

Bài tập 5.

a. $m = 3$.

b. $m = 0$.

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

CHỦ ĐỀ 1

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn số x và y là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Bài toán 1: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giải hệ phương trình (I) bằng cách tính các định thức (cũng có thể sử dụng phép thế):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1.b_2 - c_2.b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1.c_2 - a_2.c_1.$$

a. Nếu $D \neq 0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.

b. Nếu $D = 0$.

- Nếu $\begin{bmatrix} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{bmatrix}$, hệ vô nghiệm.
- Nếu $D_x = D_y = 0$, hệ nghiệm đúng với mọi x.

Kết luận:

- Với $D \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.
- Với $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $D = D_x = D_y = 0$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

ıú ý:

Để nhớ cách tính các định thức ta có minh hoạ sau:

$$\begin{array}{cccc} & \multicolumn{2}{c}{D_x} & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \\ \multicolumn{2}{c}{D} & \multicolumn{2}{c}{D_y} \end{array}$$

Với bài toán yêu cầu tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y không phụ thuộc vào ım số, khi đó từ hệ nghiệm x, y hoặc từ hệ ban đầu ta khử tham số sẽ được hệ ức cần tìm.

VÍ DỤ MINH HOẠ

dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}.$$

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m+2}{m+1}$ và $y = \dfrac{1}{m+1}$.

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

- Với $m = 1$, suy ra $D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 2$.
- Với $m = -1$, suy ra $D_x = -2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

ết luận:

- Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m+2}{m+1}$ và $y = \dfrac{1}{m+1}$.
- Với $m = 1$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 2$.
- Với $m = -1$, hệ vô nghiệm.

ıú ý. Với bài toán có nhiều hơn một tham số cần khéo léo vét cạn các trường hợp thể xảy ra.

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}.$$

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a+b \\ b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - 2ab - b^2.$$

a. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b.$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ và $y = \dfrac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$.

b. Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b.$

- Với $a = b$, suy ra:

$$\begin{cases} D_x = 2a^2 \\ D_y = -2a^2 \end{cases}$$

  - Khi $a = b = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.
  - Khi $a = b \neq 0 \Rightarrow D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.

- Với $a = -b$, suy ra $D_x = D_y = 2a^2$.
  - Khi $a = -b = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.
  - Khi $a = -b \neq 0 \Rightarrow D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $a \neq \pm b$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ và $y = \dfrac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$.
- Với $a = b = 0$, hệ có vô số nghiệm.
- Với $a = \pm b \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Ví dụ 3: (Đề 30). Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a-b)x + (2a+b)y = b \end{cases}.$$

Giải.

Ta có:

$D = 6ab;\ D_x = 2a^2 + b^2\ ;\ D_y = b^2 + 2ab - 2a^2.$

a. Nếu $D \neq 0$

$$\Leftrightarrow 6ab \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2a^2 + b^2}{6ab}$ và $y = \dfrac{b^2 + 2ab - 2a^2}{6ab}$.

b. Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow 6ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

- Với $a = 0$, suy ra $D_x = D_y = b^2$.
  - Khi $b = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.
  - Khi $b \neq 0 \Rightarrow D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.
- Với $b = 0$, suy ra:

$$\begin{cases} D_x = 2a^2 \\ D_y = -2a^2 \end{cases}.$$

  - Khi $a = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.
  - Khi $a \neq 0 \Rightarrow D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $b \neq 0$, hệ có nghiệm $x = \dfrac{2a^2 + b^2}{6ab}$ và $y = \dfrac{b^2 + 2ab - 2a^2}{6ab}$.
- Với $a = b = 0$, hệ có vô số nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, hệ vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, hệ vô nghiệm.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}.$$

a. Giải và biện luận hệ phương trình.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

Giải.

a. Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - 1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -m \\ m+1 & -1 \end{vmatrix} = m(m+1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = m + 1.$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m}{m-1}$ và $y = \dfrac{1}{m-1}$. (*)

- Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

- Với $m = -1$, suy ra $D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
- Với $m = 1$, suy ra $D_x = 2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{m}{m-1}$ và $y = \frac{1}{m-1}$.
- Với $m = -1$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
- Với $m = 1$, hệ vô nghiệm.

b. Từ các giá trị của nghiệm (x, y) từ (*) ta được:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} my = x \\ (x-1)m = y + 1 \end{cases} \Rightarrow x(x-1) = y(y+1).$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

Ví dụ 5: (Đề 75): Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6mx - (m-2)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases}.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

Giải.

1. Giải và biện luận.

Ta có:

$D = 2 - 3m - 5m^2$, $D_x = -m - 4$, $D_y = 9m + 3$.

a. Nếu $D \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 3m - 5m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{5} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m+4}{(m+1)(5m-2)} \text{ và } y = -\frac{9m+3}{(m+1)(5m-2)}. \qquad (*)$$

b. Nếu $D = 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 3m - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5} \vee m = -1.$$

- Với $m = \frac{2}{5}$, suy ra $D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.
- Với $m = -1$, suy ra $D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq -1$ và $m \neq \frac{2}{5}$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m+4}{(m+1)(5m-2)} \text{ và } y = -\frac{9m+3}{(m+1)(5m-2)}.$$

- Với $m = \frac{2}{5}$, hệ vô nghiệm.
- Với $m = -1$, hệ vô nghiệm.

2. *Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.*

Thay các giá trị của nghiệm (x, y) từ (*) vào hệ ta được:

$$\begin{cases} 6mx - (m-2)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x - y)m = 3 - 2y \\ (x - y)m = 2 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - y)(3 - 2y) = (6x - y)(2 + x).$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp việc khử tham số cần áp dụng các hằng đẳng thức lượng giác, ví dụ như: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $tg\alpha.cotg\alpha = 1$,...

Ví dụ 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x.\sin 2\alpha + y(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \\ x(1 + \cos 2\alpha) - y.\sin 2\alpha = 0 \end{cases}$$

1. Giải và biện luận hệ.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào α.

Giải.

1. Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & 1 + \cos 2\alpha \\ 1 + \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \end{vmatrix} = -\sin^2 2\alpha - (\cos 2\alpha - 1)^2 = -2(1 + \cos 2\alpha);$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & 1 + \cos 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha \end{vmatrix} = -\sin^2 2\alpha;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 1 + \cos 2\alpha & 0 \end{vmatrix} = -\sin 2\alpha.(1 + \cos 2\alpha).$$

a. Nếu $D \neq 0$

$$\Leftrightarrow -2(1 + \cos 2\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha \neq -1 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \text{ và } y = \frac{1}{2}\sin 2\alpha. \qquad (*)$$

b. Nếu $D = 0$

$$\Leftrightarrow -2(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, suy ra $D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.

Kết luận:

- Với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \text{ và } y = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, hệ có vô số nghiệm.

2. Thay các giá trị của nghiệm (x, y) từ (*) vào hệ ta được:

$$\begin{cases}\cos 2\alpha = 1 - 2x \\ \sin 2\alpha = 2y\end{cases} \Rightarrow (1-2x)^2 + (2y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 + 4y^2 = 1.$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào α.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐHAN - ĐHCS Khối C- 97): Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(2a-1)x - y = 1 \\ x + (a+1)y = -1\end{cases}.$$

1. Xét nghiệm của hệ

a. Với a = 0.

☐ x = 0 và y = −1. ☐ x = −1 và y = 0. ☐ Khác.

b. Với $a = \frac{1}{2}$.

☐ x = 1/2 và y = −1. ☐ x = 1 và y = 1. ☐ Khác.

2. Giải và biện luận hệ phương trình

Bài tập 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}x - my = 0 \\ mx - y = m + 1\end{cases}.$$

Bài tập 3: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}(m-1)x + y = m - 2 \\ x + (m-1)y = m\end{cases}$$

Bài tập 4: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab\end{cases}.$$

Bài tập 5: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}(a^3-1)x + (a^2-1)y = a - 1 \\ (a^3+1)x + (a^2+1)y = a + 1\end{cases}$$

Bài tập 6: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}x.\sin(a+b) + y.\sin b = \sin a \\ x.\cos(a+b) + y.\cos b = \cos a\end{cases}$$

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}mx + y = 2m \\ x + my = m + 1\end{cases}.$$

a. Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y không phụ thuộc vào m.

☐ x − y − 1 = 0. ☐ x + y − 2 = 0. ☐ Khác.

Bài tập 8: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x.\sin\alpha + y.\cos\alpha = \sin\alpha \\ x.\cos\alpha + y.\sin\alpha = \cos\alpha \end{cases}$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào α.

☐ $x - y - 1 = 0$. ☐ $x + y - 1 = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 9: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(1+\cos 2\alpha) + y\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \\ x(1+\cos 2\alpha) - y.\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \end{cases}$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào α.

☐ $x^2 + y^2 = 1$. ☐ $x^2 - y^2 = 1$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

1.a. Vô số nghiệm.

1.b. $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$.

Bài tập 7: b. $(x - y - 1)(x + y - 2) = 0$.

Bài tập 8: $(x - y - 1)(x + y - 1) = 0$.

Bài tập 9: $x^2(4y^2 - 4y + 2) = (x + y - 1)^2$.

CHỦ ĐỀ 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CÓ NGHIỆM THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN K

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xác định điều kiện cho ẩn số, nếu có.

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Ta có các nhận xét sau:

(i). Với $D \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.

(ii). Với $D = D_x = D_y = 0$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

(iii). Với $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.

Trong trường hợp i, iii phải so sánh giá trị của nghiệm số với điều kiện nếu có.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m nguyên để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases}$$

có nghiệm nguyên.

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 3,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -2m - 3,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 2m^2 + m.$$

a. Nếu $D = 0$

$$\Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

- Với $m = \frac{3}{2}$, suy ra $D_x = -6 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

b. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$.

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = -\frac{2m+3}{2m-3} = -1 - \frac{6}{2m-3},$$

$$y = \frac{2m^2+m}{2m-3} = m + 2 + \frac{6}{2m-3}.$$

- Vậy hệ có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ m nguyên và $2m - 3$ là ước của 6.

Ta có bảng liệt kê sau:

$2m-3$	-3	-2	-1	1	2	3
M	0	1/2 (loại)	1	2	5/2 (loại)	3

Vậy với $m = 0, 1, 2, 3$ hệ có nghiệm nguyên.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

a. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b. Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m.$$

a. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$ (*)

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ là:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m+1}{m+1} = 2 - \frac{1}{m+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \end{cases}.$$

b. Để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên với m nguyên

$\Leftrightarrow m, \frac{1}{m+1} \in Z \Leftrightarrow m + 1$ là ước của $1 \Leftrightarrow m + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = -2.$

So sánh với điều kiện (*) ta nhận được $m = 0 \vee m = -2$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} 4x - my = -m - 1 \\ (m+6)x + 2y = m + 3 \end{cases}$$

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ m+6 & 2 \end{vmatrix} = m^2 + 6m + 8,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -m-1 & -m \\ m+3 & 2 \end{vmatrix} = m^2 + m - 2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -m-1 \\ m+6 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 11m + 18.$$

Vậy hệ có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 8 = 0 \\ m^2 + m - 2 = 0 \\ m^2 + 11m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với $m = -2$ hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 4: Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm:

$$\begin{cases} mx - my = m + 1 \\ (m^2 - m)x + my = 2 \end{cases}$$

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & -m \\ m^2 - m & m \end{vmatrix} = m^3;$$

Vậy hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow m = 0$.

Với $m = 0$, hệ có dạng

$$\begin{cases} 0.x - 0.y = 1 \\ 0.x + 0.y = 2 \end{cases}$$ nên hệ vô nghiệm.

Vậy, với $m = 0$ hệ vô nghiệm.

Chú ý. Với bài toán tìm điều kiện để hệ có nghiệm thông thường ta đi giải bài oán ngược:

" Tìm tham số để hệ phương trình vô nghiệm ",

giả sử khi đó $m \in K$.

Vậy với $m \in R \backslash K$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases} \quad (I)$$

a. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

b. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x + m\cos x = 3m \\ m\sin x + \cos x = 2m + 1 \end{cases} \quad (II)$$

Giải.

a. Xét hệ phương trình (I), ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2.$$

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$.

- Với $m = 1$, hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 3 \text{ nên hệ có vô số nghiệm.}$$

- Với $m = -1$, hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = -1$ hệ vô nghiệm, do đó hệ có nghiệm với $m \neq -1$.

b. Bằng cách đặt:

$$\begin{cases} X = \sin x \\ Y = \sin y \end{cases}, \text{ điều kiện } X^2 + Y^2 = 1 \quad (*)$$

ta đưa hệ (II) về dạng :

$$\begin{cases} X + mY = 3m \\ mX + Y = 2m + 1 \end{cases} \quad (III)$$

Xét hệ phương trình (III), ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m & m \\ 2m+1 & 1 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3m \\ m & 2m+1 \end{vmatrix} = -3m^2 + 2m + 1.$$

(i). Nếu $D = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

- Với $m = 1$, hệ (III) có dạng

$$\begin{cases} X + Y = 3 \\ X + Y = 3 \end{cases} \text{ không thoả mãn (*), nên hệ vô nghiệm.}$$

- Với $m = -1$, hệ (III) có dạng

$$\begin{cases} X - Y = -3 \\ X - Y = 1 \end{cases}$$ nên hệ vô nghiệm.

(ii). Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. (**)

Hệ (III) có nghiệm duy nhất $X = \dfrac{2m}{m+1}$ và $Y = \dfrac{3m+1}{m+1}$.

Nghiệm trên thoả mãn (*) khi:

$$\left(\frac{2m}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{3m+1}{m+1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 12m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

nghiệm trên thoả mãn (**).

Vậy hệ có nghiệm khi $m = 0$ hoặc $m = -\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 6: (Đề 43): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$$

a. Với $b = 0$, hãy giải và biện luận hệ theo a và c.

b. Tìm b để với mọi a, ta luôn tìm được c sao cho hệ có nghiệm.

Giải.

Ta có:

$D = a^2 - 1$,

$D_x = ab - c^2 - c$,

$D_y = a(c^2 + c) - b$.

a. Với $b = 0$, ta được:

$D = a^2 - 1$,

$D_x = -c^2 - c$,

$D_y = a(c^2 + c)$.

- Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = -\frac{c^2 + c}{a^2 - 1} \text{ và } y = \frac{a(c^2 + c)}{a^2 - 1}.$$

- Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

1. Với $a = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = c^2 + c \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 = c^2 + c \Leftrightarrow c = 0 \vee c = -1$.

Khi đó hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.

2. Với $a = -1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = c^2 + c \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 = c^2 + c \Leftrightarrow c = 0 \vee c = -1$.

Khi đó hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x - y = 0$.

Kết luận:

- Với $a \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{c^2 + c}{a^2 - 1}$ và $y = \dfrac{a(c^2 + c)}{a^2 - 1}$.
- Với $a = 1$ và $c = 0$ hoặc $c = -1$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
- Với $a = -1$ và $c = 0$ hoặc $c = -1$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x - y = 0$.

b. Tìm b để với mọi a, ta luôn tìm được c sao cho hệ có nghiệm.

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

  Hệ có nghiệm duy nhất với $\forall b, c$ nên không cần đặt điều kiện cho b.
- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

1. Với $a = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = b \\ x + y = c^2 + c \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = c^2 + c \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0.$ (1)

Do đó: c tồn tại $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm theo c $\Leftrightarrow \Delta_c \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\dfrac{1}{4}$

2. Với $a = -1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} -x + y = b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -b = c^2 + c \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0.$ (2)

Do đó: c tồn tại $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm theo c

$$\Leftrightarrow \Delta_c \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$$

Để với $\forall a$ luôn $\exists c$ để hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1), (2) phải đồng thời có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -\dfrac{1}{4} \\ b \leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}.$$

Vậy với $-\dfrac{1}{4} \leq b \leq \dfrac{1}{4}$ thì với mọi a, ta luôn tìm được c để hệ có nghiệm.

Ví dụ 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + 2by = c + 1 \end{cases}.$$

a. Tìm a sao cho với mọi b luôn tồn tại c để hệ có nghiệm.

b. Tìm a sao cho tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b.

Giải.

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} b & -1 \\ b-6 & 2b \end{vmatrix} = 2b^2 + b - 6.$$

- Nếu $D \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 3/2 \\ b \neq -2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất với $\forall a$, $\forall c$ nên không cần đặt điều kiện cho a.

- Nếu $D = 0$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + b - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3/2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

1. Với $b = \frac{3}{2}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2ac^2 \\ 3x - 2y = -\frac{2}{3}(c+1) \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 2ac^2 = -\frac{2}{3}(c+1) \Leftrightarrow 3ac^2 + c + 1 = 0. \quad (1)$$

Do đó: c tồn tại $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm theo c

$$\Leftrightarrow \Delta_c \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 12a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{12}.$$

2. Với $b = -2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x - y = ac^2 \\ 2x - y = -\frac{1}{4}(c+1) \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow ac^2 = -\frac{1}{4}(c+1) \Leftrightarrow 4ac^2 + c + 1 = 0. \quad (2)$$

Do đó c tồn tại

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm theo c

$$\Leftrightarrow \Delta_c \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 16a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{16}.$$

a. Với $\forall b$ luôn tồn tại c để hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (1), (2) \text{ phải đồng thời có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1/12 \\ a \leq 1/16 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{16}.$$

b. Tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b

$\Leftrightarrow$ (1), (2) phải có nghiệm chung

$\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm ẩn c

$$\begin{cases} 3ac^2 + c + 1 = 0 \\ 4ac^2 + c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Chú ý. Nếu bài toán cho hệ ba phương trình với hai ẩn, thì xét hệ gồm hai phương trình và yêu cầu nghiệm thoả mãn phương trình còn lại.

Ví dụ 8: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \\ x + y = m & (3) \end{cases}$$

Giải.

Xét hệ phương trình tạo bởi (2) và (3):

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1.$$

a. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 1 + m$ và $y = -1$.

Nghiệm trên thoả mãn (1)

$$\Leftrightarrow m(1 + m) - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \ (l) \\ m = -2 \end{bmatrix}.$$

b. Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

- Với $m = 1$, suy ra hệ ban đầu có dạng:

  $x + y = 1$, có vô số nghiệm.

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -2$ hệ có nghiệm.

Chú ý. Nếu coi các phương trình (1), (2), (3) theo thứ tự là phương trình của ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) thì bài toán có thể phát biểu dưới dạng: "Tìm điều kiện của tham số để ba đường thẳng đồng quy".

Ví dụ 9: (Đề 125): Giả sử hệ phương trình :

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$$

có nghiệm. CMR:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Giải.

Xét hệ phương trình tạo bởi (2) và (3) có dạng:

$$\begin{cases} bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = ba - c^2,\ D_x = a^2 - bc,\ D_y = b^2 - ac.$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow ba - c^2 \neq 0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 - bc}{ba - c^2}$ và $y = \dfrac{b^2 - ac}{ba - c^2}$.

Nghiệm trên thoả mãn (1)

$$\Leftrightarrow a.\frac{a^2 - bc}{ba - c^2} + b.\frac{b^2 - ac}{ba - c^2} = c \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow ba - c^2 = 0$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow D_x = D_y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - ab = 0 \\ a^2 - bc = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^3 = abc \\ a^3 = abc \\ b^3 = abc \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Vậy với hệ phương trình có nghiệm thì: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Ví dụ 10: (Đề 36) Tìm m, n, p để cả ba hệ sau đồng thời vô nghiệm.

$$\begin{cases} x - py = n \\ -px + y = m \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} -px + y = m \\ nx + my = 1 \end{cases} \quad (II)$$

$$\begin{cases} nx + my = 1 \\ x - py = n \end{cases} \quad (III$$

Giải.

- Xét hệ (I).

Ta có:

$$D = 1 - p^2;\ D_x = n + pm;\ D_y = m - np.$$

Hệ (I) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - p^2 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} n + pm \neq 0 \\ m + pn \neq 0 \end{array}\right. . \end{cases}$$

- Xét hệ (II): Ta có:

  $D = -pm - n$; $D_x = m^2 - 1$; $D_y = -p - nm$.

  Hệ (II) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -pm - n = 0 \\ \left[\begin{array}{l} m^2 - 1 \neq 0 \\ -p - nm \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

- Xét hệ (III): Ta có:

  $D = -pn - m$; $D_x = -p - nm$; $D_y = n^2 - 1$.

  Hệ (III) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -pn - m = 0 \\ \left[\begin{array}{l} -p - mn \neq 0 \\ n^2 - 1 \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Như vậy, nếu hệ (I) vô nghiệm thì hệ (II) và (III) có nghiệm, do đó không tồn tại m, n, p để cả ba hệ đồng thời vô nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases}.$$

☐ $m = \overline{0,2}$. ☐ $m = \overline{0,3}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Tìm a, b để hệ sau có nghiệm với mọi c:

$$\begin{cases} (c+3)x + 4y = 5a + 3b + c \\ x + cy = ac - 2b + 2c - 1 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}.$$

a. Tìm a sao cho với mọi b luôn tồn tại c để hệ có nghiệm.

b. Tìm a sao cho tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases}.$$

a. Tìm a sao cho với mọi b luôn tồn tại c để hệ có nghiệm.

b. Tìm a sao cho tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b.

Bài tập 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = 1 \\ x - y = m \end{cases}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1. $m = \overline{0,3}$.

CHƯƠNG III
BẤT ĐẲNG THỨC

CHỦ ĐỀ 1
BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. QUAN HỆ THỨ TỰ TRONG R

Với mỗi cặp hai số thực a, b bất kì luôn luôn xảy ra một và chỉ một trong ba khả năng:

- a bằng b, kí hiệu $a = b$.
- a lớn hơn b, kí hiệu $a > b$.
- a nhỏ hơn b, kí hiệu $a < b$.

2. BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. Định nghĩa

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:

$A > B, A \geq B$

$A < B, A \leq B$.

2.2. Tính chất cơ bản

Với a, b, c, d là các số thực, ta luôn có:

Tính chất 1: Nếu $a > b \Leftrightarrow b < a$.

Tính chất 2: Nếu $a > b$ & $b > c \Rightarrow a > c$.

Tính chất 3: Nếu $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

Tính chất 4: Nếu $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$ & $\begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$.

Tính chất 5: Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$.

Chú ý quan trọng: không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 6: Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

Tính chất 7: Nếu $a > b \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{cases}$.

Tính chất 8: Nếu $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$, với $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Tính chất 9: Nếu $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, với $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

II. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán: Chứng minh bất đẳng thức

$$A > B.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: *Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa.* Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

Hướng 1: Chứng minh $A - B > 0$.

Hướng 2: Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ bất đẳng thức đúng.

Hướng 4: Biến đổi vế trái hoặc vếphải.

Phương pháp 2: *Sử dụng tính chất bắc cầu*, tức là chứng minh:

$$A > C \text{ và } C > B.$$

Phương pháp 3: *Phương pháp chứng minh phản chứng*, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

Phương pháp 4: *Phương pháp chứng minh quy nạp*, được áp dụng với các bài toán liên hệ với $n \in Z$ hoặc $n \in N$.

Phương pháp 5: *Phương pháp vectơ và hình học*, bằng việc sử dụng tính chất:

- Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì
$$a + b > c \ \& \ |a - b| < c$$
- Sử dụng định lý hàm số sin và hàm số cosin.
- $|\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u} = k\vec{v}$, $k > 0$ (tức là $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng).
- $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u} = k\vec{v}$ (tức là $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương).

III. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (ĐHQG TPHCM – 98): Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca.$$

Giải.

Ta có ba cách trình bày theo phương pháp 1 (mang tính minh hoạ), như sau:

Cách 1: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2}\right) + \left(\frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Cách 2: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \ge 2(ab + bc + ca)$$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, luôn đúng.

Cách 3: Ta luôn có:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ca \geq 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Cộng theo vế các bất phương trình trong hệ (I), ta được:

$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đpcm.

Nhận xét: Như vậy thông qua ví dụ trên đã minh hoạ cho các em học sinh thấy được ba hướng chứng minh bất đẳng thức khi sử dụng phương pháp 1 và sau đây ta sẽ minh hoạ bằng một ví dụ cho hướng 4.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$ luôn có:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Giải.

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

do đó:

$$VT = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: (ĐH Đà Nẵng – 97): Chứng minh rằng với mọi $a, b \in R$ luôn có:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

Giải.

Ta đi chứng minh với mọi x, y luôn có:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{x^4+y^4}{2}. \qquad (*)$$

Thật vậy:

$(*) \Leftrightarrow (x + y)(x^3 + y^3) \leq 2(x^4 + y^4)$

$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) \leq x^4 + y^4$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[\left(\frac{x+y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right] \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Khi đó áp dụng (*), ta được:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}=\left[\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\right]\cdot\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\le\frac{a^4+b^4}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^6+b^6}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c∈(0, 1), chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\quad b(1-c)>\frac{1}{4},\quad c(1-a)>\frac{1}{4}.$$

Giải.

Giả sử trái lại cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó nhân theo vế ba bất đẳng thức ta được:

$$a(1-b).b(1-c).c(1-a)>\frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a).b(1-b).c(1-c)>\frac{1}{64}. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$a(1-a)=a-a^2=\frac{1}{4}-(a+\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4},$$

tương tự $b(1-b)\le\frac{1}{4}$ và $c(1-c)\le\frac{1}{4}$, do đó:

$$a(1-a).b(1-b).c(1-c)\le\frac{1}{64}$$

ức là (*) sai.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với a là cạnh huyền. CMR

$$a^n\ge b^n+c^n, \text{ với } n\in N \text{ và } n\ge 2.$$

Giải.

Bất đẳng thức đúng với n = 2, bởi khi đó ta được định lý Pitago.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, tức là:

$$a^k\ge b^k+c^k \qquad (1)$$

Ta đi chứng minh nó đúng với n = k + 1, tức là chứng minh :

$$a^{k+1}\ge b^{k+1}+c^{k+1} \qquad (2)$$

hật vậy:

$$a^{k+1}=a^k.a\ge(b^k+c^k)a=b^k.a+c^k.a\underset{a>c}{\overset{a>b}{>}}b^{k+1}+c^{k+1}, \text{ đpcm.}$$

Vậy $a^n\ge b^n+c^n$, với $n\in N$ và $n\ge 2$.

Ví dụ 6: (ĐH Huế – 97): Chứng minh rằng với mọi số thức a, luôn có:

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1}\geq 2. \qquad (1)$$

Giải.

Ta có nhận xét:

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{u}\left(a+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$a^2-a+1=\left(\frac{1}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{v}\left(\frac{1}{2}-a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|=|(1,\sqrt{3})|=2.$$

Do đó (1) được viết thành:

$$|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|, \text{ luôn đúng,}$$

và dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\vec{u}=k\vec{v},\ k>0 \Leftrightarrow \frac{a+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a=0.$$

Ví dụ 7: (ĐHNT – 98): Giả sử hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=16 \end{cases}$$

CMR:

$$xy+yz+zx\leq 8.$$

Giải.

Ta có nhận xét:

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{x}{2}+y\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{u}\left(\frac{x}{2}+y,\ \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } |\vec{u}|=\sqrt{3}$$

$$y^2+yz+z^2=\left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{v}\left(\frac{z\sqrt{3}}{2},\ y+\frac{z}{2}\right) \text{ và } |\vec{v}|=4.$$

Khi đó:

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{\sqrt{3}}{2}(xy+yz+zx),$$

$$|\vec{u}|.|\vec{v}|=4\sqrt{3}.$$

Xuất phát từ tính chất:

$$\vec{u}.\vec{v}\leq|\vec{u}.\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(xy+yz+zx)\leq 4\sqrt{3} \Leftrightarrow xy+yz+zx\leq 8, \text{ đpcm.}$$

IV. BƯỚC ĐẦU LÀM QUEN VỚI PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ ĐẠI SỐ

Ví dụ 1: (ĐHNN I - 99): Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2.$$

Giải.

Nhận xét rằng:

$$VT=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\geq 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $VT=2\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\leq 2. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1. \\ x+\sqrt{x^2-1}\geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$VT=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\geq 2\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt[4]{x+\sqrt{x^2-1}}=2,$$

bởi ta có bất đẳng thức $a^2+b^2\geq 2ab$.

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$VT=2\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt[4]{x+\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x=1$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2 & (1) \\ xy=1 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Giải.

Biến đổi (1) về dạng:

$$(1)\Leftrightarrow 4=(x-y)^2+(x+y)^2+2|x^2-y^2|=2(x^2+y^2)+2|x^2-y^2|\geq 2(x^2+y^2)\geq 4xy=4$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|x^2-y^2|=0 \\ x=y \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1, 1) và (−1, −1).

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định tính đúng, sai của các bất đẳng thức sau và nêu lời giải thích:

a. (ĐHQG TPHCM – 98): $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$, với $a, b, c \in R$.

☐ Đúng. ☐ Sai.

b. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b + c + d)$, với $a, b, c, d \in R$.

☐ Đúng. ☐ Sai.

c. $a^4 + b^4 < ab(a^2 + b^2)$, với $a, b \in R$.

☐ Đúng. ☐ Sai.

d. (ĐH Đà Nẵng – 97): $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$, với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

☐ Đúng. ☐ Sai.

e. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$, với $n \in N$.

☐ Đúng. ☐ Sai.

Bài tập 2: (ĐHAN – 99): Với $x, y, z \in [0, 1]$, CMR:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

Bài tập 3: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $a + b + c \leq 1$. CMR:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$ ta có:

a. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

b. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n + 1$.

Bài tập 5: (HVQHQT – 97): Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, ta có:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

Bài tập 6: Tìm nghiệm của hệ:

a. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \end{cases}$.

☐ (0, 0). ☐ (0, 1). ☐ Khác.

b. $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{x} \\ 2\sqrt{xy - x} + \sqrt{x} = -1 \end{cases}$.

☐ (0, 0). ☐ (1, 1). ☐ Khác.

VI. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c bởi:

$$bdt \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

b. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c, d bởi:

$$bdt \Leftrightarrow (\frac{a}{2} - b)^2 + (\frac{a}{2} - c)^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

c. Bất đẳng thức là sai bởi với $a = b = 0$, ta được $0 < 0$.

d. Bất đẳng thức là đúng bởi:

$$\begin{cases} |a-b| < c \\ |b-c| < a \\ |c-a| < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 < c^2 \\ (b-c)^2 < a^2 \\ (c-a^2 < b^2 \end{cases}, \text{ cộng theo vế ta được đpcm.}$$

e. Bất đẳng thức là đúng.

Bài tập 3: Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Bài tập 4: Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp.

Bài tập 5: Ta có nhận xét:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{u}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{y\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$y^2 + yz + z^2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{v}\left(y + \frac{z}{2}, \frac{z\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$z^2 + zx + x^2 = \left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{w}\left(z + \frac{x}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \left(\frac{3}{2}(x + y + z), \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y + z)\right) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{3}(x + y + z).$$

Do đó bất đẳng thức được viết thành:

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 6:

a. Điều kiện $x, y \geq 0$

Với điều kiện ta nhận xét rằng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} \geq 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geq 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x = y = 0$.

b. Dựa vào việc đánh giá bất phương trình thứ nhất trong hệ ta được $x = y = 1$ và thấy rằng nó thoả mãn phương trình còn lại.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

CHỦ ĐỀ 2
BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nhiều bài toán sử dụng đến giá trị tuyết đối, hoặc có lời giải đơn giản nếu ta dùng giá trị tuyệt đối.

1. ĐỊNH NGHĨA

Giá trị tuyệt đối của số thực a là:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Tính chất 1: Với mọi số thực a: $\sqrt{a^2} = |a|$

Tính chất 2: Với hai số thực a, b tuỳ ý: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$.

Tính chất 3: Nếu $-b \leq a \leq b \Leftrightarrow |a| < b$.

Tính chất 4: Nếu $\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \end{cases} \Leftrightarrow a \geq |b|$.

Tính chất 5: $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức chứa dấu giái trị tuyệt đối thường được sử dụng cho các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức.

Dạng 2: Giải phương trình, bất và hệ phương trình.

1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b:

$$|a \pm b| \geq |a| - |b|$$

Giải.

Ta có:

$$|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

Giải.

Ta có:

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

Kết quả suy ra từ tính chất 5.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu:

$$|a| + |b| = a + b, \qquad (1)$$

thì $a, b \geq 0$.

Giải.

Vế trái không âm, vậy vế phải không âm, tức là $a + b \geq 0$.

Suy ra, trong hai số a, b phải có một số không âm, giả sử $a \geq 0$ suy ra

$|a| = a$.

Từ đó (1) có dạng:

$|b| = b \Leftrightarrow b \geq 0$.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ

1. Với phương trình ta sử dụng các tính chất:

Tính chất 1. Nếu $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

Tính chất 2. Nếu $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

Tính chất 3. Nếu $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Tính chất 4. Nếu $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$.

2. Với bất phương trình ta sử dụng các tính chất:

Tính chất 1. Ta có $|a + b| \leq |a| + |b|$ với mọi a, b.

Tính chất 2. Nếu $|a + b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$.

Tính chất 3. Ta có $|a - b| \geq |a| - |b|$ với mọi a, b.

Tính chất 4. Nếu $|a - b| > |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) < 0$.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = 3. \qquad (1)$$

Giải.

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = (x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 4x)$$

$$\xleftarrow{\text{Tính chất 3}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $[0, 1] \cup [3, 4]$.

***Chú ý*:**

1. Bài toán trên có thể giải nhờ *tính chất 2* như sau:

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| + |4x - x^2| = (x^2 - 4x + 3) + (4x - x^2)$$

$$\xleftarrow{\text{Tính chất 2}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{array}\right.$$

2. Đôi khi cần sử dụng một vài phép biến đổi để làm xuất hiện tính chất.

3. Các phương trình được giải bằng phương pháp *sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối* ở dạng ban đầu thường không thấy xuất hiện dấu trị tuyệt đối, nó thường xuất hiện sau phép biến đổi:

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

Ví dụ 2: (HVBCVT 2000): Giải phương trình:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2. \qquad (1)$$

Giải.

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} + 1| - |\sqrt{x-1} - 1| = |(\sqrt{x-1}+1) - (\sqrt{x-1}-1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 4}} (\sqrt{x-1} - 1).2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq 2$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình:

$$|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < 2x + 1. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < |(2x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 5x)| \Leftrightarrow (2x^2 - 5x)(2x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1/2 \\ 0 < x < \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{5}{2})$.

Ví dụ 4: Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình:

$$|x^2 - x| < |x^2 - m|. \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |(x^2 - x) - (m - x)| > |x^2 - x| - |m - x|$$

$$\Leftrightarrow (m - x)(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - m) > 0. \qquad (2)$$

- Với $m < 0$

  $(2) \Leftrightarrow x > m.$

- Với $m = 0$

  $(2) \Leftrightarrow x > 0.$

- Với $m > 0$

  $$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ -\sqrt{m} < x < \sqrt{m} \end{cases}$$

Kết luận.

- Khi $m < 0$, bất phương trình có nghiệm $x > m$.
- Khi $m = 0$, bất phương trình có nghiệm $x > 0$.
- Khi $m > 0$, bất phương trình có nghiệm $(-\sqrt{m}, \sqrt{m}) \cup (m, +\infty)$.

Chú ý. Bài toán trên có thể giải như sau:

$(1) \Leftrightarrow |(x^2 - m) + (m - x)| < |x^2 - m| + |m - x|$

$\Leftrightarrow (m - x)(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - m) > 0.$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ |x + 3y - 3| - |3x + y - 3| = 2|x + y| & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Biến đổi (2) về dạng:

$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| - |3x + y - 3| = |(x + 3y - 3) - (3x + y - 3)|$

$\Leftrightarrow (3x + y - 3)(x + y) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x + y - 3 \geq 0 \ \& \ x + y \geq 0 & (3) \\ 3x + y - 3 \leq 0 \ \& \ x + y \leq 0 & (4) \end{bmatrix}$$

a. Với (3)

$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| - (3x + y - 3) = 2(x + y) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| = 5x + 3y - 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 3y - 3 = 5x + 3y - 3 \\ x + 3y - 3 = -5x - 3y + 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x + y = 1 \end{bmatrix}.$$

- Với $x = 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \text{ và } y = 1 \\ x = 0 \text{ và } y = -1 \end{bmatrix} \quad (I).$$

- Với $x + y = 1$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \text{ và } y = 1 \\ x = 1 \text{ và } y = 0 \end{bmatrix}.$$

b. Với (4)

$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| + (3x + y - 3) = -2(x + y) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| = -5x - 3y + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 3y - 3 = 5x + 3y - 3 \\ x + 3y - 3 = -5x - 3y + 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x + y = 1 \ (I) \end{bmatrix}.$$

- Với $x = 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \text{ và } y = 1 \quad (I) \\ x = 0 \text{ và } y = -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có ba cặp nghiệm: (0, 1), (1, 0), (0, −1).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $|a| < 2|a - b|$, biết rằng $|a| > 2|b|$.

b. $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a}\right| < 1$, với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

c. $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}$, với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2.$$

☐ $x=3$. ☐ $x=6$. ☐ Khác.

Bài tập 3: (ĐHTS 97): Giải phương trình:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

☐ $x=2$. ☐ $x=5$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}\ .$$

a. Với giá trị nào của a thì phương trình có nghiệm.

☐ $a>8 \vee a<0$. ☐ $a\geq 8 \vee a\leq 0$. ☐ Khác.

b. Khi đó hãy tính giá trị của nghiệm đó.

☐ $x=\frac{a^2}{4}$. ☐ $x=\frac{4}{a^2}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Giải và biện luận phương trình sau theo a, b:

$$\sqrt{2(x^2-x\sqrt{x^2-a^2})-a^2}+\sqrt{2(x^2+x\sqrt{x^2-a^2})-a^2}=|x+b|+|x-b|$$

Từ đó trả lời câu hỏi khi nào phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

☐ $a=b$. ☐ $a=-b$. ☐ Khác.

Bài tập 6: (Đề 69) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{82}{9} \\ |x+\dfrac{1}{y}|+|\dfrac{10}{3}-x+y|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

☐ $(\frac{1}{3},-3)$. ☐ $(3,-\frac{1}{3})$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1|-|\sqrt{x-2}-1|=|(\sqrt{x-2}+1)-(\sqrt{x-2}-1)|$$

$$\xleftarrow{\text{Tính chất 4}} (\sqrt{x-2}-1).2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\geq 3$.

Chú ý: Rất nhiều học sinh giải bài này chỉ thu được nghiệm $x=3$.

Bài tập 3: Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2}=1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1|+|2-\sqrt{x-1}|=|(\sqrt{x-1}-1)+(2-\sqrt{x-1})|$$

$$\xleftarrow{\text{Tính chất 1}} (\sqrt{x-1}-1)(2-\sqrt{x-1})\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1\leq\sqrt{x-1}\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq x-1\leq 4 \Leftrightarrow 2\leq x\leq 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $2\leq x\leq 5$.

Chú ý:

1. Rất nhiều học sinh giải bài này chỉ thu được nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.
2. Bài toán trên có thể giải nhờ *tính chất 2* như sau:

$$|\sqrt{x-1}-1|+|2-\sqrt{x-1}|=(\sqrt{x-1}-1)+(2-\sqrt{x-1})$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 2}}\begin{cases}\sqrt{x-1}-1\ge 0\\ 2-\sqrt{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}\ge 1\\ \sqrt{x-1}\le 2\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x\le 5.$$

Bài tập 4: Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4a+16)x}=x-2a\ \Rightarrow\ x=\frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\sqrt{a^2-16a+64}=2\sqrt{a^2-8a+16}-\sqrt{a^2}\Leftrightarrow |a-8|=2|a-4|-|a| \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow |(2a-8)-a|=|2a-8|-|a|\Leftrightarrow a(a-8)\ge 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a\ge 8\\ a\le 0\end{bmatrix}.$$

Vậy với $a \ge 8$ hoặc $a \le 0$ thì (1) có nghiệm và nghiệm đó là $x=\frac{a^2}{4}$.

Chú ý. Bài toán trên có thể giải như sau:

$$(3)\Leftrightarrow |a-8|+|a|=|(a-8)+a|\Leftrightarrow a(a-8)\ge 0.$$

Bài tập 5: Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện $x^2 \ge a^2$.

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x-\sqrt{x^2-a^2})^2}+\sqrt{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}=|x+b|+|x-b|$$

$$\Leftrightarrow |x-\sqrt{x^2-a^2}|+|x+\sqrt{x^2-a^2}|=|x+b|+|x-b|. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

$$(x-\sqrt{x^2-a^2}).(x+\sqrt{x^2-a^2})=a^2\ge 0,$$

nên ta được:

$$(2)\Leftrightarrow |x-\sqrt{x^2-a^2}+x+\sqrt{x^2-a^2}|=|x+b|+|x-b|\Leftrightarrow |2x|=|x+b|+|x-b|$$

$$\Leftrightarrow |(x+b)+(x-b)|=|x+b|+|x-b|\Leftrightarrow (x+b)(x-b)\ge 0\ x^2\ge b^2.$$

Vậy, phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases}x^2\ge a^2\\ x^2\ge b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}a=b=0\\ x^2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a^2\ge b^2\\ x^2\ge a^2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2\le b^2\\ x^2\ge b^2\end{cases}\end{bmatrix}.$$

Kết luận.

-Khi a = b = 0, phương trình có nghiệm với mọi x.

-Khi $|a| \geq |b|$, phương trình có nghiệm $|x| \geq |a|$.

-Khi $|a| \leq |b|$, phương trình có nghiệm $|x| \geq |b|$.

Bài tập 6: Viết hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} & (1) \\ |x + \dfrac{1}{y}| + |\dfrac{10}{3} - x + y| = \dfrac{10}{3} + y + \dfrac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

Biến đổi (2) về dạng:

$$|x + \frac{1}{y}| + |\frac{10}{3} - x + y| = (x + \frac{1}{y}) + (\frac{10}{3} - x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} \geq 0 & (3 \\ \dfrac{10}{3} - x + y \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3y^2 + 10y + 3}{3y} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y > 0 \\ -3 \leq y \leq -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

a. Với $y > 0$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 = \frac{82}{9} - y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < y \leq \frac{\sqrt{82}}{3}.$$

- Với $x \geq 0$

  $(5) \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2}$ thoả mãn (3) và (4).

- Với $x < 0$

  $(5) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2}$ thoả mãn (4).

Khi đó để thoả mãn (3) ta phải có:

$$-\sqrt{\frac{82}{9} - y^2} + \frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \geq \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \geq \frac{82}{9} - y^2 \Leftrightarrow 9y^4 - 82y^2 + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2 \geq 9 \\ y^2 \leq \dfrac{1}{9} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{0<y<\frac{\sqrt{82}}{3}} \begin{bmatrix} 3 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{82}}{3} \\ 0 < y \leq \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

b. Từ (3) và (4) suy ra:

$$-\frac{1}{y} \leq x \leq \frac{10}{3} + y \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \leq x^2 \leq (\frac{10}{3} + y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + y^2 \leq x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \leq (\frac{10}{3} + y)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^4 - 82y^2 + 9 \leq 0 \\ 3y^2 + 10y + 3 \geq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{-3 \leq y \leq -\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} y = -3 \xrightarrow{(1)} x = 1/3 \\ y = -1/3 \xrightarrow{(1)} x = 3 \end{bmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$(\frac{1}{3},-3);\ (3,-\frac{1}{3});\ \begin{cases} x=\sqrt{\frac{82}{9}} \\ 3\le y<\frac{\sqrt{82}}{3} \\ 0<y\le\frac{1}{3} \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 3
BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VÀ ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bất đẳng thức Côsi: Cho hai số không âm a, b, ta luôn có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Mở rộng

a. Với các số a, b, c không âm, ta luôn có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

b. Với n số a_i, $i = \overline{1,n}$ không âm, ta luôn có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

c. Với n số a_i, $i = \overline{1,n}$ dương, ta luôn có:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Công thức mở rộng: Cho n số dương tuỳ ý a_i, $i = \overline{1,n}$ và n số hữu tỉ dương q_i, $i = \overline{1,n}$ thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1,$$

Khi đó ta luôn có:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leq \sum_{i=1}^{n} q_i a_i,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Phương pháp chứng minh

Gọi M là mẫu số chung của các số hữu tỉ q_i, $i = \overline{1,n}$, khi đó:

$$q_i = \frac{m_i}{M},\ i = \overline{1,n},$$

từ đó theo giả thiết suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M.$$

Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i a_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} a_i \text{, có tất cả M số dương}$$

$$\geq \frac{1}{M} . M \sqrt[M]{\prod_{i=1}^{n} a_i^{m_i}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{m_i}{M}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} ,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\underbrace{a_1 = .. = a_1}_{m_1 \text{ số } a_1} = ... = \underbrace{a_n = .. = a_n}_{m_n \text{ số } a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

Chú ý: Công thức trên được mở rộng khi $q_i, i = \overline{1,n}$ là n số thực dương.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Côsi thường được sử dụng cho các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức.

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

Dạng 3: Giải phương trình, bất và hệ.

1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1: Cho n số dương a_i, $i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

Giải.

Ta có:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} ,$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} .$$

Nhân hai vế tương ứng, ta được bất đẳng thức cần chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ví dụ 2: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Giải.

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b) + (b + c) + (c + a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}-3$$

$$=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để nhận được các phần tử không âm trong bất đẳng thức, từ đó mới có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: (ĐHQG TPHCM – 98): Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geq 0.$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{a+b-2c}{c}+\frac{b+c-2a}{a}+\frac{c+a-2b}{b}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\geq 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\geq 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}}=6, \text{đpcm.}$$

dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a=b=c.$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng liên tiếp nhiều lần bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: (Đại học Việt Nam - 1991): Cho a, b > 0, m ∈ N^*. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\geq 2^{m+1}.$$

Giải.

Ta có:

$$1+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftrightarrow\left(1+\frac{a}{b}\right)^m\geq 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m},$$

$$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}\Leftrightarrow\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\geq 2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m},$$

suy ra

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}+2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}$$

$$\geq 2.\sqrt{2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}}=2^{m+1},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{a}{b} \\ 1=\dfrac{b}{a} \\ \left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m=\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m \end{cases} \Leftrightarrow a=b.$$

Chú ý: Với các bất đẳng thức có điều kiện cần khéo léo biến đổi để tận dụng được điều kiện của giả thiết.

2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: Cho hai số $a, b \geq 0$.

a. Nếu $a + b = k$ – const, tính giá trị lớn nhất của ab.

b. Nếu $ab = k$ – const, tính giá trị nhỏ nhất của a+b.

Giải.

a. Theo bất đẳng thức Cosi ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4},$$

từ đó suy ra $(ab)_{Max}=\dfrac{k^2}{4}$, đạt được khi $a=b=\dfrac{k}{2}$.

Ý nghĩa: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.

b. Theo bất đẳng thức Cosi ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{k},$$

từ đó suy ra $(a+b)_{Min}=2\sqrt{k}$, đạt được khi $a=b=\dfrac{k}{2}$.

Ý nghĩa: Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông là hình có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{x}{3}+\frac{15}{x}, \text{ với } x\in(0,+\infty).$$

Giải.

Với $x\in(0,+\infty)$, ta được $\dfrac{x}{3}, \dfrac{15}{x}>0$

Sử dụng bất đẳng thức Cosi ta được:

$$y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x} \geq 2.\sqrt{\frac{x}{3}.\frac{12}{x}} = 4,$$

từ đó suy ra $y_{Min} = 4$, đạt được khi

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 6.$$

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị nhỏ nhất của một tổng có tích bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tích bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = 2x + \frac{1}{x^2}$, trên $(0, +\infty)$, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x.x.\frac{1}{x^2}} = 3.$$

2. Trong trường hợp là tổng luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x^3 + \frac{3}{x^2}, \text{ với } x \in (0; +\infty).$$

Giải.

Biến đổi:

$$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}},$$

từ đó suy ra $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}}$, đạt được khi

$$\frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}.$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = (x + 2)(3 - x), \text{ với } x \in [-2, 3].$$

Giải.

Với $x \in [-2, 3]$, ta được $x + 2, 3 - x \geq 0$, do đó sử dụng bất đẳng thức Cosi ta được:

$$y = (x + 2)(3 - x) \leq \left[\frac{(x+2)+(3-x)}{2}\right]^2 = \frac{25}{4},$$

từ đó suy ra $y_{Max} = \frac{25}{4}$, đạt được khi

$$x + 2 = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất của một tích có tổng bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tổng bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = (2x + 1)(2 - 3x)$, trên $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (2x + 1)(2 - 3x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}).\frac{1}{3}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - x)$$

$$\le \frac{1}{6}\left[\frac{(x + \frac{1}{2}) + (\frac{2}{3} - x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2.$$

2. Trong trường hợp là tích luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = x(1 - x)^3, \text{ với } x \in [0; 1].$$

Giải.

Biến đổi:

$$y = x(1 - x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1 - x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1 - x)(1 - x)(1 - x),$$

rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm $3x$ và 3 số $1 - x$, ta được:

$$y \le \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3x + (1 - x) + (1 - x) + (1 - x)}{4}\right]^4 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ

Ví dụ 1: (ĐH Huế – 98): Giải phương trình:

$$\frac{3}{|x + 1|} + \frac{|x + 1|}{3} = 2. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện $x \ne -1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x + 1|} + \frac{|x + 1|}{3} \ge 2.\sqrt{\frac{3}{|x + 1|}.\frac{|x + 1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x + 1|} = \frac{|x + 1|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = 2$ và $x = -4$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1. \\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$VT=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\ge 2\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$VT=2\Leftrightarrow \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x=1$.

Ví dụ 3: Giải hệ:

$$\begin{cases} 6x^2.\sqrt{x^3-6x+5}=(x^3+4)(x^2+2x-6) & (1) \\ x+\dfrac{2}{x}\ge 1+\dfrac{2}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Giải.

Do $x,\dfrac{2}{x}$ cùng dấu nên từ (2) suy ra

$$x+\frac{2}{x}>0\Rightarrow x>0\Rightarrow x^3+4>0\Rightarrow x^2+2x-6>0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x<-1-\sqrt{7} \\ x>-1+\sqrt{7} \end{bmatrix} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>-1+\sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2+x-5>0 \end{cases}.$$

Sử dụng BĐT Côsi ta có:

$$2\sqrt{x^3-6x+5}=2\sqrt{(x-1)(x^2+x-5)}\le (x-1)+(x^2+x-5)=x^2+2x-6$$

$$\text{và } 3x^2=3.\sqrt[3]{\frac{x^3}{2}.\frac{x^3}{2}.4}\le \frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+4=x^3+4$$

Vậy $VT(1)\le VP(1)$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$, thoả mãn (2).

Vậy nghiệm của hệ là: $x=2$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng tỏ rằng trong mọi tam giác, ta đều có:

$$S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

trong đó S là diện tích tam giác, 2p là chu vi tam giác.

Bài tập 2: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. (ĐH Huế – 98): $4\sqrt[4]{(a+1)(b+4)(c-2)(d-3)} \le a + b + c + d$, với $a \ge -1$, $b \ge -4$, $c \ge 2$ và $d > 3$.

b. (ĐHQG – 98): $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, với $x, y > 0$.

c. (PVBC&TT – 98): $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}) \le ab$, với $a, b \ge 1$.

d. (ĐHSP TPHCM – 95): $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$, với a, b, c thuộc [0,1].

e. (ĐHHH – 99): $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$, với $x, y, z \ge 0$ và $x, y, z \le 3$.

f. (ĐHTL – 97): $\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \ge \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$, với $a, b, c, d > 0$.

g. (ĐHBK HN – 90): $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{2abc}$, với $a, b, c > 0$.

h. (ĐHTL – 99): $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} \le \frac{1}{abc}$, với $a, b, c > 0$.

i. (ĐH Huế – 97): $(\frac{1+x}{2})^n + (\frac{1+y}{2})^n + (\frac{1+z}{2})^n \ge 3$, với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$, $n \in Z^+$.

j. (ĐHTN – 2000): $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{18}{xyz+2}$, với $x, y, z > 0$ có $x + y + z = 1$.

Bài tập 3:

1. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 4, hãy chỉ ra hình có diện tích lớn nhất.
2. Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 3, hãy chỉ ra hình có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 4: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = (x + 3)(7 - x), \text{ với } x \in [-3, 7].$$

☐ $y_{Max} = 25$. ☐ $y_{Max} = 4$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}, \text{ với } x \in (0, +\infty).$$

☐ $y_{Min} = 16$. ☐ $y_{Min} = 6$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x^2 + \frac{2}{x^3}, \text{ với } x \in (0; +\infty).$$

☐ $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$. ☐ $y_{Min} = \frac{25}{\sqrt[5]{27}}$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Tìm giác trị lớn nhất của hàm số

$$y = x^3(2 - x)^5, \text{ với } x \in [0; 2].$$

☐ $y_{Max} = 3^3.5^5.4^{-8}$. ☐ $y_{Max} = 3^5.5^3.4^{-8}$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho x_1, x_2, x_3 là ba số dương, và

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

với a_{ij}, với i,j = 1, 2, 3 là những số thực dương, thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 1, \text{ với } i = 1,2,3 \\ a_{j1} + a_{j2} + a_{j3} = 1, \text{ với } j = 1,2,3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $y_1y_2y_3 \geq x_1x_2x_3$.

Bài tập 9: Cho n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thay đổi, nhưng luôn luôn thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^{a_1}\ x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số dương cho trước.

Bài tập 10: Giải phương trình:

$$2\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = x^2 + 6x - 1.$$

☐ x = 1. ☐ x = 7. ☐ Khác.

Bài tập 11: Tìm m để bất phương trình

$$\sqrt{(2 + x)(4 - x)} \leq x^2 - 2x + m.$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [-2, 4]$.

☐ m = 4. ☐ m > 4. ☐ Khác.

Bài tập 12: Giải hệ:

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

☐ (1, 1) & (−1, −1). ☐ (1, 1) & (−1, 1). ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, thế thì

$$a + b + c = 2p$$

và nhớ rằng $p - a$, $p - b$, $p - c$ là ba số dương.

Theo công thức Hêrông

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p.\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi

$$p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{tam giác đều.}$$

Bài tập 4: $y_{Max} = 25$, đạt được khi $x = 2$.

Bài tập 5: $y_{Min} = 6$, đạt được khi $x = 6$.

Bài tập 6: $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$, đạt được khi $x = \sqrt[5]{3}$.

Bài tập 7: $y_{Max} = \frac{3^3.5^5}{4^8}$, đạt được khi $x = \frac{3}{4}$.

Bài tập 8: Ta có với i = 1, 2, 3

$$x_1^{a_{i1}}\ x_2^{a_{i2}}\ x_3^{a_{i3}} \le a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = y_i.$$

Nhân các vế tương ứng của bất đẳng thức này, ta được:

$$x_1^{a_{11}+a_{21}+a_{11}}\ x_1^{a_{12}+a_{22}+a_{23}}\ x_1^{a_{13}+a_{23}+a_{33}} \le y_1y_2y_3.$$

hay $y_1y_2y_3 \ge x_1x_2x_3$.

Bài tập 9: Để ý rằng một mặt ta không có điều kiện $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ để áp dụng ngay bất đẳng thức, và mặt khác cần biến đổi thích hợp để vận dụng được điều kiện

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

Gọi

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

đặt $b_i = \frac{a_i}{a}$ (i = 1, 2, 3, ..., n), thế thì $b_1 + b_2 + ... + b_n$ là n số dương có tổng bằng 1.

Do vậy theo công thức mở rộng Côsi, ta được:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{b_1}\left(\frac{x2}{a_2}\right)^{b_2}...\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{b_n} \le \frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_2}{a_2}x_2 + ... + \frac{b_n}{a_n}x_n$$

$$= \frac{1}{a}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{a}.$$

Nâng cả hai vế lên luỹ thừa với số mũ a, ta được:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{x2}{a_2}\right)^{a_2}\ldots\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{a_n}\le\frac{1}{a^a}$$

hay

$$x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}\le\frac{1}{a^a}\ x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$$

Vậy biểu thức $x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

$$\frac{1}{a^a}.a_1^{a_1}\ a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}\ (a+a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_n=1\\ \dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\ldots=\dfrac{x_n}{a_n}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x_i=\frac{a_i}{a}=\frac{a_i}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ \text{với}\ i=\overline{1,n}.$$

Bài tập 10: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}=x^2+6x-1.$$

Điều kiện $7x-4\ge0\Leftrightarrow x\ge\frac{4}{7}$. (*)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}\le(7x-4)+(x^2-x+3)=x^2+6x-1=VP.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi

$$7x-4=x^2-x+3\Leftrightarrow x^2-8x+7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=7\end{array}\right.$$

Bài tập 11: Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm $\forall x\in[-2,4]\Rightarrow x=1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$3\le m-1\Leftrightarrow m\ge4.$$

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[-2,4]$.

Điều kiện đủ

Giả sử $m\ge4$, khi đó:

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$VT=\sqrt{(2+x)(4-x)}\le\frac{(2+x)+(4-x)}{2}=3.$$

- Biến đổi vế phải về dạng:

$$VP=x^2-2x+m=(x-1)^2+m-1\ge3$$

- Suy ra:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2 - 2x + m.$$

Vậy với $m \ge 4$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [-2, 4]$.

ài tập 12: Ta viết:

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = 2 & (1) \\ xy = 1 & (2) \end{cases} \qquad \textbf{(I)}$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$4 = (x-y)^2 + (x+y)^2 + 2|x^2 - y^2| = 2(x^2+y^2) + 2|x^2 - y^2| \ge 2(x^2+y^2) \ge 4xy = 4$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|x^2 - y^2| = 0 \\ x - y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1, 1) và (−1, −1).

CHỦ ĐỀ 4
BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI VÀ ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki: Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là những số thực, ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Mở rộng

a. Với các số thực a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

b. Với hai bộ n số a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$, ta luôn có:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

c. Với a_1, a_2, ..., a_n là n số tuỳ ý, ta luôn có:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

Bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpxki áp dụng cho hai bộ n số (1; 1; ...; 1) và $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki thường được sử dụng cho các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức.

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

Dạng 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.

1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số thực x, y luôn có:

$$(x^3 + y^3)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

Giải.

Ta có:

$$VT = (x^3 + y^3)^2 = (x.x^2 + y.y^2)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4), \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với a, b, c tuỳ ý, ta luôn có:

$$ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Giải.

Ta có:

$$VT^2 = (ab + bc + ca)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta đi đến:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge |ab + bc + ca| \ge ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: (ĐH Y & D – 1998): Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là một nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}.$$

Giải.

- Ta có:

$$\left(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}\right)^2 = \left(1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c}\right)^2$$

$$\le (1^2 + 1^2 + 1^2)(p - a + p - b + p - c) = 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$$

- Ta đi chứng minh $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$ bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

$$\Leftrightarrow p < p - a + p - b + p - c + 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}, \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 4: (ĐH Y & D – 1999): Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(1^2 + 1^2 + 1^2) \ge \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2.$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right). \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\geq\sqrt[3]{\left|\frac{abc}{abc}\right|}=1,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},$$

suy ra

$$\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

từ đó (*) được biến đổi:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Chú ý: Với các bài toán có điều kiện ta cần khéo léo biến đổi để nhận được biểu thức điều kiện hoặc sử dụng ngay biểu thức điều kiện để biến đổi. Cụ thể ta đi xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 5: Hai số x, y thoả mãn $x^2+y^2=1$. Chứng minh:

$$-5\leq 3x+4y\leq 5$$

Giải.

Ta có:

$$(3x+4y)^2\leq(3^2+4^2)(x^2+y^2)=25.$$

Lấy căn hai vế, ta được:

$$|3x+4y|\leq 5.$$

Tức là: $-5\leq 3x+4y\leq 5$ (đpcm)

Ví dụ 6: (ĐHNT – 95): Cho các số không âm x, y thoả mãn $x^3+y^3=2$. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2\leq 2.$$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(x^2+y^2)^2=(\sqrt{x}.\sqrt{x^3}+\sqrt{y}.\sqrt{y^3})^2\leq(x+y)(x^3+y^3)=2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow(x^2+y^2)^4\leq 4(x+y)^2=4(1.x+1.y)^2\leq 4(1+1)(x^2+y^2)=8(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow(x^2+y^2)^3\leq 8\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 2, \text{đpcm}.$$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi x = y = 1.

2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: Trong tất cả các nghệm (x, y) của phương trình

$$2x + 3y = 1 \qquad (*)$$

hãy chỉ ra nghiệm có tổng $3x^2 + 2y^2$ có nghiệm nhỏ nhất.

Giải.

Ta có:

$$1 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot y\sqrt{2}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right)(3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6}(3x^2 + 2y^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2y^2 \geq \frac{6}{35}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ta có:

$$x\sqrt{3} : \frac{2}{\sqrt{3}} = y\sqrt{2} : \frac{3}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{35} \text{ và } y = \frac{9}{35}$$

Vậy $(3x^2 + 2y^2)_{Min} = \frac{6}{35}$ đạt được khi $x = \frac{4}{35}$ và $y = \frac{9}{35}$.

Ví dụ 2: Hai số dương x, y thoả mãn:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng x + y.

Giải.

Để ý rằng:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{y}} \cdot \sqrt{y}.$$

Do vậy, theo bất đẳng thức Bunhiaçôpxki, suy ra:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \leq \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)(x + y) = 6(x + y) \Rightarrow x + y \geq \frac{1}{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}.$$

Dấu = chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6 \\ \dfrac{\dfrac{x}{2}}{x} = \dfrac{\dfrac{y}{3}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{6}}{6},\ y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $\text{Min}(x + y) = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là ba số dương cho trước. x, y, z là ba số dương thay đổi, luôn luôn thoả mãn điều kiện:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1.$$

Với mỗi số nguyên dương n, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng:

$$S_n = x^n + y^n + z^n \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

Giải.

Để ý rằng:

$$\sqrt[n+1]{a^n} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{x}} . \sqrt[n+1]{x^n} .$$

Do vậy áp dụng công thức cho n + 1 bộ số, trong đó:

n bộ $\left(\sqrt[n+1]{\frac{a}{x}} ; \sqrt[n+1]{\frac{b}{y}} ; \sqrt[n+1]{\frac{c}{z}}\right)$

và bộ $\left(\sqrt[n+1]{x^n} ; \sqrt[n+1]{y^n} ; \sqrt[n+1]{z^n}\right)$

Ta được:

$$\left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}\right)^{n+1} = \left[\left(\sqrt[n+1]{\frac{a}{x}}\right)^n . \sqrt[n+1]{x^n} + \left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{y}}\right)^n . \sqrt[n+1]{y^n} + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt[n+1]{\frac{c}{z}}\right)^n . \sqrt[n+1]{z^n}\right]$$

$$\le \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(x^n + y^n + z^n\right) = S_n.$$

Vậy $\text{Min}S_n = \left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}\right)^{n+1}$, đạt được khi:

$$x^n : \frac{a}{x} = y^n : \frac{b}{y} = z^n : \frac{c}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1 \\ \dfrac{x^{n+1}}{a} = \dfrac{y^{n+1}}{b} = \dfrac{z^{n+1}}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1 \\ \dfrac{x}{\sqrt[n+1]{a}} = \dfrac{y}{\sqrt[n+1]{b}} = \dfrac{z}{\sqrt[n+1]{c}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}} \\ y = \dfrac{\sqrt[n+1]{b}}{\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}} \\ z = \dfrac{\sqrt[n+1]{c}}{\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}} \end{cases}.$$

Ví dụ 1: (HVQHQT 1996) : Giải phương trình:

$$2x^4 + (1-2x)^4 = \frac{1}{27}. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi vế trái của phương trình:

$$2x^4 + (1-2x)^4 = \frac{1}{3}.3.[2x^4 + (1-2x)^4] = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)[x^4+x^4+(1-2x)^4]$$

$$\geq \frac{1}{3}[x^2+x^2+(1-2x)^2]^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{9}\{3.[x^2+x^2+(1-2x)^2]\}^2$$

$$= \frac{1}{27}\{(1^2+1^2+1^2)[x^2+x^2+(1-2x)^2]\}^2$$

$$\geq \frac{1}{27}[x+x+(1-2x)]^4 = \frac{1}{27}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2 = (1-2x)^2 \\ x = x = 1-2z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: (ĐHNT TP. HCM 1996) : Giải phương trình:

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x + \sqrt{2-x^2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được:

$$+\begin{cases} x + \sqrt{2-x^2} = 1.x + 1.\sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{\left[1^2+1^2\right]\left[x^2+\left(2-x^2\right)\right]} = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} = 1.x + 1.\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} \leq \sqrt{\left[1^2+1^2\right]\left[\dfrac{1}{x^2}+\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{2-x^2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} \leq 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra x = 1 và đó chính là nghiệm của phương trình.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a. Nếu $x^2 + y^2 = 1$, thì $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$.

b. Nếu $x + 3y = 2$, thì $x^2 + y^2 \ge \frac{5}{2}$

c. Nếu $2x + 3y = 7$, thì $2x^2 + 3y^2 \ge \frac{49}{5}$

Bài tập 2: Cho a, b, c, p, q là 5 số dương tuỳ ý. Chứng minh:

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \ge \frac{3}{p+q} \qquad (1$$

Bài tập 3: Cho a, b, c là ba số dương. m, n là hai số nghuyên dương. Chứng minh

$a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n \le a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}$.

Bài tập 4: x, y, z là ba số không âm. Chứng minh rằng với ba số tự nhiên k, m, n tuỳ ý, ta luôn có:

$x^k y^m z^n + y^k z^m x^n + z^k x^m y^n \le x^{k+m+n} + y^{k+m+n} + z^{k+m+n}$.

Bài tập 5: Cho a, b, c, d là bốn số dương tuỳ ý. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 1$, ta đều có

$$\frac{a^n}{b+c+d} + \frac{b^n}{a+c+d} + \frac{c^n}{a+b+d} + \frac{d^n}{a+b+c} \ge \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}}{3}.$$

Bài tập 6: Cho p, q là hai số dương tuỳ ý, $a_1, a_2, \ldots a_n$, là n số dương tuỳ ý. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $k \ge 2$, ta luôn có:

$$\frac{a_1^k}{pa_2 + qa_3} + \frac{a_2^k}{pa_3 + qa_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}^k}{pa_n + qa_1} + \frac{a_n^k}{pa_1 + qa_2} \ge \frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_1^{k-1}}{p+q}.$$

Bài tập 7: Cho a, b, c là ba số dương cho trước, còn x, y, z là ba số dương thay đổi, luôn luôn thoả mãn điều kiện:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = x + y + z$.

☐ $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$. ☐ $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. ☐ Khác.

Bài tập 8: a, b, c là bốn số dương cho trước. trong tất cả các nghệm dương (x, y, z, t) của phương trình:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} = 1.$$

Hãy chỉ ra nghiệm với tổng:

$$S_n = x^n + y^n + z^n + y^n \text{ nhỏ nhất (n nguyên dương).}$$

Bài tập 9: Trong tất cả các nghiệm (x, y, z) của phương trình:

$$ax + by + cz = 1 \ (abc \neq 0).$$

Hãy chỉ ra nghiệm:

a. Với tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

b. Với tổng $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}$ nhỏ nhất (n nguyên ≥ 2)

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: Ký hiệu bất đẳng thức cần chứng minh là (1)

Để ý rằng:

$$a = \sqrt{\frac{a}{pb+qc}} \cdot \sqrt{a(pb+qc)},$$

$$b = \sqrt{\frac{b}{pc+qa}} \cdot \sqrt{b(pc+qa)},$$

$$c = \sqrt{\frac{c}{pa+qb}} \cdot \sqrt{c(pa+qb)}$$

Gọi S là vế trái của bất đẳng thức (1).

Ta có:

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{pb+qc}} \cdot \sqrt{a(pb+qc)} + \sqrt{\frac{b}{pc+qa}} \cdot \sqrt{b(pc+qa)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{c}{pa+qb}} \cdot \sqrt{c(pa+qb)}\right)^2$$

$$\leq S.[a(pb+qc) + b(pc+qa) + c(pa+qb)] = S(p+q)(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

Mặt khác:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

bởi:

$$3(ab+bc+ca) = (ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)$$

$$\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2.$$

Với kết quả đó từ (2) ta suy ra:

$$(a+b+c)^2 \leq S(p+q).\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{3}{p+q}, \text{ vì } a+b+c > 0, p+q > 0.$$

Bài tập 3: Xét m + n bộ ba số: m bộ (a; b; c) và bộ (b; c; a).

Ta được kết quả:

$$(a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n)^{m+n} \le (a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n})^m . (a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n})^n$$
$$= (a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n})^{m+n}.$$

tương đương với đẳng thức cần chứng minh.

Bài tập 6: Gọi S là VT của đẳng thức trên. Vì:

$$a_1^{k-1} = \sqrt{\frac{a_1^k}{pa_2 + qa_3}} . \sqrt{a_1^{k-1}(pa_2 + qa_3)},$$

Nên ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai bộ số, ta được:

$$(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})^2 \le S[a_1^{k-2}(pa_2 + qa_3) + a_2^{k-2}(pa_3 + qa_4) + ... +$$
$$+ a_n^{k-2}(pa_1 + qa_2)]$$
$$= S[p(a_1^{k-2} a_2 + a_2^{k-2} a_3 + ... + a_n^{k-2} a_1) +$$
$$+ q(a_1^{k-2} a_3 + a_2^{k-2} a_4 + ... + a_n^{k-2} a_2)] \quad (2)$$

Có thể mở rộng kết quả ở ví dụ trên với n số dương $a_1, a_2, ... a_n$ và với hai số tự nhiên k, l tuỳ ý, ta được:

$$a_1^k . a_2^l + a_2^k . a_3^l + ... + a_n^k . a_n^l \le a_1^{k+l} + a_2^{k+l} + ... + a_n^{k+l}$$

và những kết quả tương tự.

Do vậy:

$$a_1^{k-2} a_2 + a_2^{k-2} a_3 + ... + a_n^{k-2} a_1 \le a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1},$$
$$a_1^{k-2} a_3 + a_2^{k-2} a_4 + ... + a_n^{k-2} a_2 \le a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}. \quad (3)$$

Từ các kết quả này và từ (1) suy ra:

$$(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})^2 \le S(p + q)(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 7: Ta có:

$$\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{x}} . \sqrt{x},$$

Vậy ta được:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = (\sqrt{\frac{a}{x}} . \sqrt{x} + \sqrt{\frac{b}{y}} \sqrt{y} + \sqrt{\frac{c}{z}} \sqrt{z})^2$$
$$\le (\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z})(x + y + z) = S.$$

ấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sqrt{x} : \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{y} : \sqrt{\frac{b}{y}} = \sqrt{z} : \sqrt{\frac{c}{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{y}{\sqrt{b}} = \frac{z}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} ; y = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} ; z = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

ıy $\mathbf{Min}(x + y + z) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.

CHƯƠNG IV
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT
CHỦ ĐỀ 1
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b < 0$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $ax < -b$ (1)

a. Nếu $a = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0$.

- Nếu $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Nếu $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $a > 0$.

$(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$, nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty, -\frac{b}{a})$.

c. Nếu $a < 0$.

$(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$, nghiệm của bất phương trình là: $(-\frac{b}{a}, +\infty)$.

Kết luận:

- Với $a = 0$ và $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $a = 0$ và $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $a > 0$, nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty, -\frac{b}{a})$.
- Với $a < 0$, nghiệm của bất phương trình là: $(-\frac{b}{a}, +\infty)$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình:

$$mx - 2 > x - 3m .$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$(m - 1)x > 2 - 3m$. ( )

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$(1) \Leftrightarrow 0x > -1$ (luôn đúng), bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

ường hợp 2. Với $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

(1) $\Leftrightarrow x > \frac{2-3m}{m-1}$, là nghiệm của bất phương trình.

ường hợp 3. Với $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

(1) $\Leftrightarrow x < \frac{2-3m}{m-1}$, là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận:

- Với $m = 1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $m > 1$, bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{2-3m}{m-1}$.
- Với $m < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{2-3m}{m-1}$.

dụ 2: Tìm m để bất phương trình:

$$m^2x + 4m - 3 < x + m^2$$

nghiệm .

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0. \qquad (1)$$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

i tập 1: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $(x - m)^2 + (x - 2m)^2 + (x - 3m)^2 \leq 3x^2 - 13mx + 13m^2 - 1.$

b. $(m^2 + m + 1)x + 3m > (m^2 + 2)x + 5m - 1.$

c. $m^2x + 1 > 3 + (3m - 2)x.$

ài tập 2: Giải và biện luận các bất phương trình:

a $x + \frac{x-1}{m+1} > \frac{x+1}{m+1} - mx.$

b $x + \frac{x-1}{m} > \frac{x+1}{m} - (m + 1)x$, với $m \neq 0.$

i tập 3: Giải và biện luận bất phương trình:

$$x + 1 > \frac{ax}{b} + \frac{b}{a}, \text{ với } a, b > 0.$$

IV . HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$mx \le -m^2 - 1.$$

- Với $m = 0$, ta được:

  $0 \le -1$, vô nghiệm.

- Với $m > 0$, ta được:

  $x \le -\dfrac{m^2+1}{m}$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $m < 0$, ta được:

  $x \ge -\dfrac{m^2+1}{m}$ là nghiệm của bất phương trình.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(m-1)x > 2m - 1.$$

- Với $m = 1$, ta được:

  $0 > -1$, luôn đúng.

- Với $m > 1$, ta được:

  $x > \dfrac{2m-1}{m-1}$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $m < 0$, ta được:

  $x < \dfrac{2m-1}{m-1}$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(m^2 - 3m + 2)x > 2.$$

- Với $m = 1$ hoặc $m = 2$, ta được:

  $0 > 2$, vô nghiệm.

- Với $m < 1 \vee m > 2$, ta được:

  $x > \dfrac{2}{m^2-3m+2}$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $1 < m < 2$, ta được:

  $x < \dfrac{2}{m^2-3m+2}$ là nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 2:

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m+1} - \frac{1}{m+1} > \frac{x}{m+1} + \frac{1}{m+1} - mx \Leftrightarrow (m+1)x > \frac{2}{m+1}.$$

- Với $m = -1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m > -1$, ta được:

$$x > \frac{2}{(m+1)^2}$$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $m < -1$, ta được:

$$x < \frac{2}{(m+1)^2}$$ là nghiệm của bất phương trình.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m} - \frac{1}{m} > \frac{x}{m} + \frac{1}{m} - (m+1)x \Leftrightarrow (m+2)x > \frac{2}{m}.$$

- Với $m = -2$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m > -2$, ta được:

$$x > \frac{2}{m(m+1)}$$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $m < -2$, ta được:

$$x < \frac{2}{m(m+1)}$$ là nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 3: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$a(a-b)x < b(a-b)$$

- Với $a = b$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $a > b$, ta được:

$$x < \frac{b}{a}$$ là nghiệm của bất phương trình.

- Với $a < b$, ta được:

$$x > \frac{b}{a}$$ là nghiệm của bất phương trình.

CHỦ ĐỀ 2
DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định lí. Nhị thức

$$f(x) = ax + b.$$

Ta có:

- f(x) cùng dấu với a khi x lớn hơn nghiệm $x_0 = -\frac{b}{a}$.
- f(x) trái dấu với a khi x nhỏ hơn nghiệm $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Bảng tóm tắt dấu của f(x) = ax + b:

x	$-\infty$	$-b/a$	∞
f(x)	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Chúng ta lưu ý các kết quả quan trọng sau:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

   $f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

2. $f(x) \geq 0, \forall x \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

   $f(x) \leq 0, \forall x \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}$.

3. $f(x) \geq 0, \forall x \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

   $f(x) \leq 0, \forall x \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}$.

4. $f(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}$

   $f(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình:

$$m(x - m) - x + m + 6 > 0$$

a. Nghiệm đúng với mọi x.

b. Nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

c. Nghiệm đúng với mọi $x < -1$.

d. Nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$f(x) = (m + 1)x - m^2 + m + 6 > 0. \qquad (1)$$

a. Nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 0 \\ -m^2 + m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

b. Nghiệm đúng với $\forall x > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ -m^2 + m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3.$$

c. Nghiệm đúng với $\forall x < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -m^2 + 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{5}.$$

d. Nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m + 6 \geq 0 \\ -m^2 + 2m + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 3 \\ 1 - \sqrt{8} \leq m \leq 1 + \sqrt{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{8} \leq m \leq 3.$$

Chú ý:

a. Nếu câu b) được đổi thành: có tập nghiệm là $\{x \in R | x > 0\}$ thì điều kiện là:

$$\begin{cases} m + 1 > 0 \\ \dfrac{-m^2 + m + 6}{m + 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

b. Nếu câu c) được đổi thành: có tập nghiệm là $\{x \in R | x < 1\}$ thì điều kiện là:

$$\begin{cases} m + 1 < 0 \\ \dfrac{-m^2 + m + 6}{m + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt{5}$$

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình

$$\frac{mx + 1}{m + 1} < \frac{mx - 1}{m - 1}, \text{ với } m \neq \pm 1.$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{mx - 1}{m - 1} - \frac{mx + 1}{m + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(m + 1)(mx - 1) - (m - 1)(mx + 1)}{(m + 1)(m - 1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m(x - 1)}{(m + 1)(m - 1)} > 0. \qquad (1)$$

Xét dấu $A = \dfrac{2m}{(m+1)(m-1)}$:

M	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2m$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$m+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$m-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
A		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Với $A = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

(1) $\Leftrightarrow 0(x-1) > 0$ vô nghiệm.

Trường hợp 2. Với $A > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0 \vee m > 1$.

(1) $\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, là nghiệm của bất phương trình.

Trường hợp 3. Với $A < 0 \Leftrightarrow m > -1 \vee 0 < m < 1$.

(1) $\Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận:

- Với $m = 0$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $-1 < m < 0 \vee m > 1$, bất phương trình có nghiệm là $x > 1$.
- Với $m > -1 \vee 0 < m < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x < 1$.

Ví dụ 3: Xác định tất cả các giá trị của m sao cho hai bất phương trình sau tương đương

$$(m-1)x - m > 0 \quad (1)$$

$$(m+1)x - m + 1 > 0 \quad (2)$$

Giải.

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$(m-1)x > m \quad (1')$$

$$(m+1)x > m - 1 \quad (2')$$

a. Nếu $m = 1$.

- Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 0x > 1$ vô nghiệm
- Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > 0$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

b. Nếu $m = -1$.

- Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$
- Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow 0x > -3$ đúng với mọi x.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

c. Nếu $m \neq \pm 1$.

(1) và (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m để hai bất phương trình tương đương với nhau.

Ví dụ 4: (Đề 97): Xác định m sao cho hai bất phương trình sau tương đương

$(m-1)x - m + 3 > 0$,

$(m+1)x - m + 2 > 0$.

Giải.

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$(m-1)x > m - 3$ (1)

$(m+1)x > m - 2$ (2)

a. Nếu $m = 1$.

- Bất phương trình (1)

$\Leftrightarrow 0x > -2$, đúng với mọi x.

- Bất phương trình (2)

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

b. Nếu $m = -1$.

- Bất phương trình (1)

$\Leftrightarrow x < 2$.

- Bất phương trình (2)

$\Leftrightarrow 0x > -3$, đúng với $\forall x \in R$.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

c. Nếu $m \neq \pm 1$.

(1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m-3}{m-1} = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Kết luận: với $m = 5$, hai bất phương trình tương đương với nhau.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để bất phương trình:

$$m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x$$

a. Nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ Khác.

b. Nghiệm đúng với mọi $x \geq -\frac{1}{2}$.

☐ $-1 \leq m \leq 0$. ☐ $0 \leq m \leq 1$. ☐ Khác.

c. Nghiệm đúng với mọi $x < 1$.

☐ $m = 1$. ☐ $m = -1$ ☐ Khác.

d. Nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

☐ $m \le 0$ ☐ $m \le 1$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Tìm m để bất phương trình:

$$(m + 1)x - m + 2 > 0$$

a. Nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m = 0$ ☐ $m = -1$. ☐ Khác.

b. Nghiệm đúng với mọi $x \ge 2$.

☐ $m \ge -1$ ☐ $m \le -1$. ☐ Khác.

c. Nghiệm đúng với mọi $x < 1$.

☐ $m \le -2$ ☐ $m \le -1$. ☐ Khác.

d. Nghiệm đúng với mọi $x \in [1, 3]$.

☐ $m > -5/2$ ☐ $m \le -5/2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Tìm m để bất phương trình:

$$m^2x + 1 \ge m + (3m - 2)x$$

vô nghiệm.

☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ Khác.

Bài tập 4: (ĐHBK 90): Tìm m để bất phương trình

$$m^2x + m(x + 1) - 2(x - 1) > 0$$

nghiệm đúng với $\forall x \in [-2,1]$

☐ $0 < m < 1$. ☐ $0 < m < 3/2$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Xác định m sao cho các bất phương trình sau tương đương

$$(m + 1)x - m - 3 > 0,$$
$$(m - 1)x - m - 2 > 0 \quad .$$

☐ $m = -2$. ☐ $m = -5$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $m = 1$.

b. $0 \le m \le 1$.

c. $m = 1$.

d. $m \le 1$.

Bài tập 2:

a. $m = -1$.

b. $m \geq -1$.

c. $m \leq -1$.

d. $m > -\frac{5}{2}$

Bài tập 3: $m = 2$.

Bài tập 4: $0 < m < \frac{3}{2}$.

Bài tập 5: $M = -5$.

CHƯƠNG V
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

CHỦ ĐỀ 1
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình của hệ đó. Cụ thể ta đi xét bài toán sau :

Bài toán: Giải và biện luận hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 \le 0 \\ a_2 x + b_2 \le 0 \end{cases} \quad (I)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập bảng xét dấu chung cho a_1 và a_2.

Bước 2: Xét các trường hợp riêng biệt nhận được từ bước 1. Thông thường ta có được các trường hợp sau :

Trường hợp 1: Nếu $a_1 > 0$ và $a_2 > 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -b_1/a_1 \\ x \le -b_2/a_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \text{Min}[-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}] \text{ là nghiệm của hệ.}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_1 < 0$ và $a_2 < 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -b_1/a_1 \\ x \ge -b_2/a_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \text{Max}[-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}] \text{ là nghiệm của hệ.}$$

Trường hợp 3: Nếu $a_1 > 0$ và $a_2 < 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -b_1/a_1 \\ x \ge -b_2/a_2 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm điều kiện là:

$$-\frac{b_2}{a_2} \le -\frac{b_1}{a_1}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là: $-\frac{b_2}{a_2} \le x \le -\frac{b_1}{a_1}$.

Trường hợp 4: Nếu $a_1 < 0$ và $a_2 > 0$: tương tự trường hợp 3.

Trường hợp 5: Nếu $a_1 = 0 \vee a_2 = 0$.

Khi đó thay trực tiếp giá trị của tham số vào hệ (I).

Chú ý: Với các bài toán chỉ đòi hỏi đơn lẻ, như: " Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm, nhiệm duy nhất ... " tốt nhất các em học lên trình bày đòi hỏi của bài toán thông qua các bước giải biện luận và mỗi bước có chỉ ra sự tồn tại của đòi hỏi.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x - m) < x - 1 \end{cases}$$

có nghiệm.

Giải.

Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (m-2)x > 3m - 6 & (1) \\ (m-1)x < m^2 - 1 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Ta đi giải đồng thời hai bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu của $m - 2$ và $m - 1$:

m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$m - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$m - 1$		$-$	0	$+$		$+$	

Xét 5 trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m < 1$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m + 1 \end{cases} \Rightarrow m + 1 < x < 3 \text{ (vì } m < 1 \Leftrightarrow m + 1 < 2 < 3).$$

Vậy hệ có nghiệm là $(m + 1, 3)$.

Trường hợp 2. Với $m = 1$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 0x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Trường hợp 3. Với $1 < m < 2$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < m + 1 \end{cases} \Rightarrow x < \min\{3, m + 1\} = m + 1 \text{ (vì } 1 < m < 2 \Leftrightarrow 2 < m + 1 < 3).$$

Vậy hệ có nghiệm là $(-\infty, m + 1)$.

Trường hợp 4. Với $m = 2$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Trường hợp 5. Với $m > 2$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < m+1 \text{ (vì } m > 2 \Leftrightarrow m+1 > 3).$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $(3, m+1)$.

Kết luận: hệ bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

Chú ý: Nếu a_1 hoặc a_2 luôn khác 0 (giải sử $a_1 \neq 0$). Khi đó thực chất bài toán được chuyển về việc giải biện luận bất phương trình còn lại với điều kiện K.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ mx + 2m - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Ta đi giải từng bất phương trình.

- *Giải (1):*

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{m-1}{2}.$$

- *Giải (2):*

Viết lại bất phương trình (2) dưới dạng: $mx \leq 1 - 2m$. (3)

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$.

$$(3) \Leftrightarrow 0x \leq 1 \text{ (luôn đúng)}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq -\frac{1}{2}$, và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 2. Với $m > 0$.

$$(3) \Leftrightarrow x \leq \frac{1-2m}{2}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min\left(\frac{m-1}{2}, \frac{1-2m}{2}\right)$ và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 3. Với $m < 0$.

$$(3) \Leftrightarrow x \geq \frac{1-2m}{2}.$$

Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{1-2m}{2} = \frac{m-1}{2} \Leftrightarrow m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad (1) \\ m = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của m thì hệ sau nhận $x \in [0, 1)$ làm nghiệm:

$$\begin{cases} m(x-1)+2 \geq 0 \\ m(x+1) \leq (m-1)(x-2) \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} mx \geq m-2 & (1) \\ x \leq m+2 & (2) \end{cases} \quad \textbf{(I)}$$

Giải (1): Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 0x \geq -2$ (luôn đúng).

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq 2$, chứa khoảng $[0, 1)$.

Trường hợp 2. Với $m < 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{m-2}{m}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min\left(\frac{m-2}{m}, m+2\right)$.

Vậy để hệ nhận $x \in [0, 1)$ làm nghiệm điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{m-2}{m} \geq 1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1,$$

Kết hợp với $m < 0$ được: $-1 \leq m < 0$.

Trường hợp 3. Với $m > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x \geq \frac{m-2}{m}.$$

Vậy để hệ nhận $x \in [0, 1)$ làm nghiệm điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$$

Kết hợp với $m > 0$ được: $0 < m \leq 2$.

Vậy hệ nhận $x \in [0, 1)$ làm nghiệm khi $-1 \leq m \leq 2$.

***Chú ý*:** Nếu hệ có dạng:

$$\begin{cases} f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases} \quad \textbf{(I)}$$

ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$\textbf{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ |f(x)| \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f^2(x) \leq a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ |f(x)-a||f(x)+a| \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

và trong nhiều trường hợp việc giải biện luận (*) đơn giản hơn so với việc giải biện luận đơn lẻ từ (I).

Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Giải và biện luận bất phương trình kép:

$$-1 \le \frac{x+m}{mx+1} \le 1. \qquad (1)$$

Giải.

- Với $m = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
- Với $m \ne 0$ thì điều kiện $x \ne -\frac{1}{m}$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\left|\frac{x+m}{mx+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+m}{mx+1}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+m}{mx+1}-1\right)\left(\frac{x+m}{mx+1}+1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m^2)(x^2-1) \le 0. \qquad (2)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

- Với $m = 1$.

  $(2) \Leftrightarrow 0x \le 0$ (luôn đúng).

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $x \ne -1$.

- Với $m = -1$.

  $(2) \Leftrightarrow 0x \le 0$ (luôn đúng).

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $x \ne 1$.

Trường hợp 2. Với $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < 1$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow |x| \le 1$, (luôn thoả mãn $x \ne -\frac{1}{m}$).

Trường hợp 3. Với $1 - m^2 < 0 \Leftrightarrow |m| > 1$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge 1$, (luôn thoả mãn $x \ne -\frac{1}{m}$).

Kết luận:

- Với $m = 1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \ne -1$.
- Với $m=-1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \ne 1$.
- Với $|m|<1$, bất phương trình có nghiệm là $|x| \le 1$.

  Với $|m|>1$, bất phương trình có nghiệm là $|x| \ge 1$.

Ví dụ 5: Hãy xác định tất cả các giá trị của a, b sao cho mọi nghiệm của bất phương trình:

$$|x - a + 1| \le 2b + 3 \qquad (1)$$

cũng là nghiệm của bất phương trình:

$$|2x - b - 6| \le 3b + 2. \qquad (2)$$

Giải.

Điều kiện :

$$\begin{cases} 2b + 3 \ge 0 \\ 3b + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow b \ge -\frac{2}{3}.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -2b - 3 \le x - a + 1 \le 2b + 3 \Leftrightarrow a - 2b - 4 \le x \le a + 2b + 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow -3b - 2 \le 2x - b - 6 \le 3b + 2 \Leftrightarrow -b + 2 \le x \le 2b + 4.$$

Vậy, nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 4 \le 2b + 4 \\ -b + 2 \le a - 2b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 2 \\ a \ge b + 6 \end{cases} \Rightarrow b + 6 \le a \le 2. \qquad (3)$$

Vì $b \ge -\frac{2}{3} \Rightarrow b + 6 \ge -\frac{2}{3} + 6 > 2.$

Vậy điều kiện (3) không xảy ra. Suy ra không tồn tại a, b để nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Chú ý: Ngoài phương pháp trên bài toán còn có thể được giải dựa trên phương pháp điều kiện cần và đủ.

Ví dụ 6: **(Đề 79):** Giải và biện luận hệ bất phương trình

$$(m^2 - 4)x \le m - 2 \le (m^2 - 2m - 3)x.$$

Giải.

Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (m^2 - 4)x \le m - 2 & (1) \\ (m^2 - 2m - 3)x \ge m - 2 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Ta đi giải đồng thời hai bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu của m^2-4 và $m^2 - 2m - 3$:

m	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$m^2 - 4$		+	0	−		−	0	+		+	
$m^2 - 2m - 3$		+		+	0	−		−	0	+	

Xét 8 trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m < -2$ hoặc $m > 3$. (3)

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \le \dfrac{1}{m+2} \\ x \ge \dfrac{m-2}{m^2-2m-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{m-2}{m^2-2m-3} \le x \le \frac{1}{m+2}.$$

Ta phải có:

$$\frac{m-2}{m^2-2m-3} \le \frac{1}{m+2} \Leftrightarrow m^2-4 \le m^2-2m-3 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với (3) $\Rightarrow m < -2$.

Vậy, với $m < -2$ hệ có nghiệm là $[\frac{m-2}{m^2-2m-3}, \frac{1}{m+2}]$.

Trường hợp 2. Với $m = -2$.

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} 0x \le -4 \\ x \ge -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Trường hợp 3. Với $-2 < m < -1$.

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{m+2} \\ x \ge \dfrac{m-2}{m^2-2m-3} \end{cases} \Rightarrow x \ge \max\{\frac{m-2}{m^2-2m-3}, \frac{1}{m+2}\} = \frac{1}{m+2}.$$

Vậy, với $-2 < m < -1$ hệ có nghiệm là $[\frac{1}{m+2}, +\infty)$.

Trường hợp 4. Với $m = -1$.

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ 0x \ge -3 \end{cases} \Rightarrow x \ge 1.$$

Vậy, với $m = -1$ hệ có nghiệm là $[1, +\infty)$.

Trường hợp 5. Với $-1 < m < 2$. (4)

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{m+2} \\ x \le \dfrac{m-2}{m^2-2m-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m+2} \le x \le \frac{m-2}{m^2-2m-3}.$$

Ta phải có:

$$\frac{1}{m+2} \le \frac{m-2}{m^2-2m-3} \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với (4) $\Rightarrow \frac{1}{2} \le m < 2$.

Vậy, với $\frac{1}{2} \le m < 2$ hệ có nghiệm là $[\frac{1}{m+2}, \frac{m-2}{m^2-2m-3}]$.

Trường hợp 6. Với m = 2.

Hệ (I) $\Leftrightarrow x \le 0$.

Vậy, với m = 2 hệ có nghiệm là $(-\infty, 0]$.

Trường hợp 7. Với $2 < m < 3$.

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{m+2} \\ x \le \frac{m-2}{m^2-2m-3} \end{cases} \Rightarrow x \le \min\{\frac{m-2}{m^2-2m-3}, \frac{1}{m+2}\} = \frac{1}{m+2}.$$

Vậy, với $2 < m < 3$ hệ có nghiệm là $(-\infty, \frac{1}{m+2}]$.

Trường hợp 8. Với m = 3.

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{5} \\ 0x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m < -2$ hệ có nghiệm là $[\frac{m-2}{m^2-2m-3}, \frac{1}{m+2}]$.
- Với m = −2 hệ vô nghiệm.
- Với $-2 < m < -1$ hệ có nghiệm là $[\frac{1}{m+2}, +\infty)$.
- Với m=-1 hệ có nghiệm là $[1, +\infty)$.
- Với $-1 < m < \frac{1}{2}$ hệ vô nghiệm.
- Với $\frac{1}{2} \le m < 2$ hệ có nghiệm là $[\frac{1}{m+2}, \frac{m-2}{m^2-2m-3}]$.
- Với m = 2 hệ bất phương trình có nghiệm là $(-\infty, 0]$.

- Với $2 < m < 3$ hệ bất phương trình có nghiệm là $(-\infty, \frac{1}{m+2}]$.
- Với $m = 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} mx - 2 > x + 1 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}.$$

☐ $m < 1$ ☐ $m > 1$ ☐ Khác.

Bài tập 2: Với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \le 0 \\ mx + m - 1 \le 0 \end{cases}.$$

☐ $m = -2/3$. ☐ $m = -3/2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} mx - m - 2 \ge 0 \\ mx - 1 \ge m + x \end{cases}.$$

☐ $m = 0$. ☐ $m = 1$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Giải và biện luận các hệ bất phương trình:

a $\begin{cases} mx - 1 > 0 \\ (3m - 2)x - m > 0 \end{cases}.$

b $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) < 0 \\ mx + 1 < 2x + m \end{cases}.$

Bài tập 5: Giải và biện luận hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + m > 4 \\ \dfrac{x+1}{x-2} < \dfrac{x+4}{x+1} \end{cases}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $m < 1$.

Bài tập 2: Ta đi giải từng bất phương trình.

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \le 0 & (1) \\ mx + m - 1 \le 0 & (2) \end{cases}.$$

- Giải (1):

$$(1) \Leftrightarrow x \le \frac{2m-2}{3}.$$

- Giải (2):

Viết lại bất phương trình (2) dưới dạng: $mx \le 1 - m$. (3)

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$.

$(3) \Leftrightarrow 0x \le 1$ (luôn đúng).

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x$.

Khi đó nghiệm của hệ là $x \le -\frac{2}{3}$, và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 2. Với $m > 0$.

$$(3) \Leftrightarrow x \le \frac{1-m}{m}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là $x \le \min\left(\frac{2m-2}{3}, \frac{1-m}{m}\right)$ và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 3. Với $m < 0$.

$$(3) \Leftrightarrow x \ge \frac{1-m}{m}.$$

Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{2m-2}{3} = \frac{1-m}{m} \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \quad (l) \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{3}{2}$.

Bài tập 3: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} mx \ge m + 2 \\ (m-1)x \ge m + 1 \end{cases}.$$

Để hệ có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\begin{cases} m(m-1) < 0 \\ \frac{m+2}{m} = \frac{m+1}{m-1} \text{ vô nghiệm.} \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 2
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Một ứng dụng quan trọng của hệ bất phương trình bậc nhất nhiều ẩn số (ta xét trong trường hợp hai ẩn) là bài toán *quy hoạch tuyến tính*, một loại toán tìm phương án tối ưu.

Bài toán: (*Bài toán tối ưu*): Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \le 0 \\ \quad \dots \\ a_k x + b_k y \ge 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Tìm cặp (x, y) thoả mãn hệ bất phương trình trên đồng thời làm cho biểu thức F = f(x, y) (có chứa x và y) đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định miền đa giác $A_1A_2...A_n$ thoả mãn hệ (I).

Bước 2. Tính các giá trị $F_1, F_2, ..., F_n$ của hàm F tại các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$.

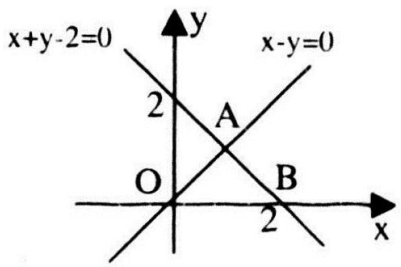
Bước 3. Ta có:

- $F_{max} = \max\{ F_1, F_2, ..., F_n \}$.
- $F_{min} = \min\{ F_1, F_2, ..., F_n \}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x - y < 0 & (1) \\ x + y < 2 & (2) \\ y > 0 & (3) \end{cases}.$$



Giải.

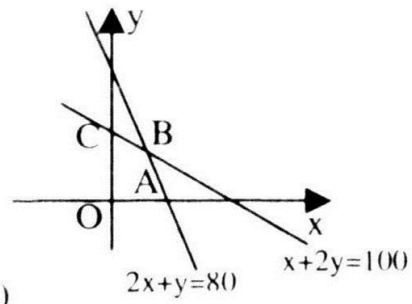
Nghiệm của hệ là cặp (x, y). thoả mãn ba bất phương trình (1), (2), (3). Ta đi tìm nghiệm của từng bất phương trình:

- Nghiệm của (1) là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng x − y = 0.
- Nghiệm của (2) là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng x + y − 2 = 0.
- Nghiệm của (3) là phần mặt phẳng phía trên đường thẳng y = 0.

Vậy, nghiệm của hệ là phần mặt phẳng trong tam giác OAB.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại hàng. Mỗi sản phẩm loại I cần 2l nguyên liệu và 30h, đem lại lợi nhuận là 4000đ cho mỗi đơn vị. Mỗi sản phẩm loại II cần 4l nguyên liệu và 15h, đem lại lợi nhuận là 3000đ cho mỗi đơn vị. Xưởng có 200l nguyên liệu và 1200h làm việc. Hỏi sản xuất mỗi loại hàng bao nhiêu để mức lợi nhuận cao nhất.

Giải.



Ta thiết lập:

Gọi x là số hàng loại I phải sản xuất.

Gọi y là số hàng loại II phải sản xuất.

$\Rightarrow$ Mức lợi nhuận thu được là F=4000x+3000y.

Ta có các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x + 4y \le 200 \\ 30x + 15y \le 1200 \\ x \ge 0, x \text{ nguyên} \\ y \ge 0, y \text{ nguyên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \le 100 & (1) \\ 2x + y \le 80 & (2) \\ x \ge 0, x \text{ nguyên} & (3) \\ y \ge 0, y \text{ nguyên} & (4) \end{cases} \quad (I)$$

Vậy, x, y phải là những số tự nhiên thoả mãn (I) đồng thời làm cho F đạt giá trị lớn nhất.

Nghiệm của hệ (I) là cặp (x, y) thoả mãn bốn bất phương trình (1), (2), (3), (4). Ta đi tìm nghiệm của từng bất phương trình:

- Nghiệm của (1) là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng x + 2y = 100.
- Nghiệm của (2) là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng 2x + y = 80.
- Nghiệm của (3) là phần mặt phẳng phía trên đường thẳng x = 0.
- Nghiệm của (3) là phần mặt phẳng phía trên đường thẳng y = 0.

Vậy, nghiệm của hệ là phần mặt phẳng trong tứ giác OABC.

Ta có:

$A(40, 0) \Rightarrow F_A = 160000$; $B(20, 40) \Rightarrow F_B = 200000$;

$C(0, 50) \Rightarrow F_C = 150000$; $O(0, 0) \Rightarrow F_O = 0$.

Khi đó: $F_{max} = \max\{ F_A, F_B, F_C, F_O \} = 200000$, đạt được khi x = 20 và y = 40.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ x + y - 1 < 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Gọi S là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy có toạ độ thoả mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 8x - 3y + 17 \le 0 \\ 3x - 5y - 13 \ge 0 \\ 5x + 2y - 1 \le 0 \end{cases}.$$

a Tìm các điểm của S có toạ độ làm cho biểu thức $F_1 = 3x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất.

b Tìm các điểm của S có toạ độ làm cho biểu thức $F_2 = x + 100y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 3: Một gia đình cần 900g chất prôtit và 400g chất lipit trong thức ăn mỗi ngày. Ta biết rằng thịt bò chứa 80% prôtit và 20% lipit, thịt heo chứa 60% prôtit và 40% lipit, người ta chỉ mua nhiều nhất 1600g thịt bò, 1100g thịt heo. Giá tiền 1kg thịt bò là 3000đ, giá tiền 1kg thịt heo là 2400đ. Hỏi gia đình phải mua mỗi loại thịt bao nhiêu để chi phí ít nhất.

CHƯƠNG VI
CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ BẬC NHẤT

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC NHẤT

I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Giải và biện luận phương trình

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bước 2: Giải và biện luận (1).

Bước 3: Giải và biện luận (2).

Bước 4: Kết luận:

Trong bước này các em học sinh cần biết cách kết hợp các trường hợp đã xét trong cả bước 1 và bước 2 để có được lời kết luận đầy đủ và tường minh.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(5x - 3)(4x + 1)(x - 8)(x + 3) = 0 .$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 5x - 3 = 0 \\ 4x + 1 = 0 \\ x - 8 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ x = -1/4 \\ x = 8 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình:

$$(m - 2)x^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[(m - 2)x - m - 1](x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (m - 2)x = m + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Ta đi giải và biện luận (2).

a. Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

$(2) \Leftrightarrow 0x = 3$ mâu thuẫn $\Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

b. Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{m+1}{m-2}.$$

Kết luận:

- Với $m = 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 2$, phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{m+1}{m-2}$.

Nhận xét: Bằng việc biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích ta đã biện luận được một phương trình bậc 2, tuy nhiên sau này ta có được một phương pháp tổng quát hơn để giải và biện luận một phương trình bậc hai bất kỳ.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải và biện luận phương trình

$$\frac{ax+b}{cx+d} = e, \text{ với } c \neq 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: **Đặt điều kiện** $cx + d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$.

Bước 2: **Biến đổi (1) về dạng:**

$$(a - ce)x = de - b. \qquad (2)$$

Bước 3: **Biện luận:**

a. **Nếu** $a - ce = 0$.

$$(2) \Leftrightarrow 0 = de - b.$$

- **Nếu** $de - b = 0$, (2) nghiệm đúng với $\forall x \in R \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
- **Nếu** $de - b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. **Nếu** $a - ce \neq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{de-b}{a-ce}.$$

Kiểm tra điều kiện:

$$x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{de-b}{a-ce} \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad \neq bc$$

Bước 4: Kết luận.

Chú ý: Tổng quát cho lớp phương trình dạng

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

Tập hợp nghiệm của phương trình này là nghiệm của phương trình A(x) = 0 không làm cho B(x) bằng 0, tức là:

$$\begin{cases} B(x) \neq 0 \\ A(x) = 0 \end{cases}$$

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Biến đổi (1) về dạng:

$$(m - 1)x = m + 4. \qquad (2)$$

a. Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

(2) $\Leftrightarrow 0 = 5$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m-1}.$$

Kiểm tra điều kiện:

$$x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$$

Kết luận:

- Với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m \in R\setminus\{1, -\frac{3}{2}\}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$.

Ví dụ 2: (Đề 103): Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a}{ax - 1} + \frac{b}{bx - 1} = \frac{a + b}{(a + b)x - 1}. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện :

$$\begin{cases} ax - 1 \neq 0 \\ bx - 1 \neq 0 \\ (a + b)x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a + b)x \neq 1 \end{cases}, \qquad (I)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$abx[(a + b)x - 2] = 0. \qquad (2)$$

a. Nếu $a = b = 0$.

Điều kiện (I) luôn đúng.

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in R$.

b. Nếu:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.

c. Nếu:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$.

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \neq \frac{1}{a}$.

d. Nếu:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -a \neq 0.$$

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow x = 0$, là nghiệm duy nhất của phương trình.

e. Nếu:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}.$$

Điều kiện (I) trở thành: $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a+b}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \frac{2}{a+b} \end{bmatrix}.$$

- Nghiệm $x = \frac{2}{a+b}$ chỉ thoả mãn điều kiện khi $a \neq b$.

Kết luận:

- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{a}$.
- Với $b = \pm a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Với $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0, a \neq b$, phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{2}{a+b}$.

III. SƠ LƯỢC PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải và biện luận phương trình

$$|ax + b| = |cx + d|.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Áp dụng tính chất

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

Phương trình được chuyển thành dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} ax + b = cx + d & (2) \\ ax + b = -cx - d & (3) \end{array}\right.$$

Như vậy tập nghiệm của phương trình là hợp 2 tập nghiệm của (2), (3).

Bài toán: Giải và biện luận phương trình

$$|ax + b| = cx + d.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Áp dụng phép biến đổi

$$|A| = B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (I)$$

$$\text{hoặc } |A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A \geq 0 \\ A = B \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} A \leq 0 \\ -A = B \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (II)$$

Lưu ý:

- Nếu B không chứa tham số ta lựa chọn phép biến đổi (I).
- Nếu B chứa tham số ta lựa chọn phép biến đổi (II).
- Trong trường hợp cả A, B đều chứa tham số thì tuỳ vào độ phức tạp của A, B ta lựa chọn phép biến đổi (I) hoặc (II).

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải biện luận phương trình:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 1. \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình được chuyển thành dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ |x+2| = |x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+2 = x-2 \\ x+2 = -x+2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 2: (ĐHTS 98): Giải phương trình:

$$\frac{3}{|x-4|-1} = |x+3|. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện

$$|x-4|-1 \neq 0 \Leftrightarrow |x-4| \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \neq 1 \\ x-4 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x + 3$ và $x - 4$:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x-4$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Trường hợp 1: với $x \leq -3$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{-x+4-1} = -x-3 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = -x-3 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{3} \ (l) \\ x = -2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: với $-3 < x < 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{-x+4-1} = x+3 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = x+3 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Trường hợp 3: với $x \geq 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{x-4-1} = x+3 \Leftrightarrow \frac{3}{x-5} = x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{19} \ (l) \\ x = 1+\sqrt{19} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là:

$$x = -2\sqrt{3},\ x = \pm\sqrt{6} \text{ và } x = 1+\sqrt{19}.$$

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình:

$$|mx + 1| = |3x + m - 2|. \quad (1)$$

Giải.

Phương trình được chuyển thành dạng:

$$\begin{bmatrix} mx + 1 = 3x + m - 2 \\ mx + 1 = -3x - m + 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (m-3)x = m - 3 & (2) \\ (m+3)x = 1 - m & (3) \end{bmatrix}$$

a. Giải và biện luận phương trình (2)

Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

(2) $\Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in R$.

Nếu $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

(2) $\Leftrightarrow x = 1$: phương trình có nghiệm duy nhất.

b. Giải và biện luận phương trình (3)

Nếu $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

(3) $\Leftrightarrow 0x = 4$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$.

(3) $\Leftrightarrow x = \dfrac{1 - m}{m + 3}$: là nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $m = 3$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $m = -3$, phương trình có một nghiệm là: $x = 1$.
- Với $m \neq \pm 3$, phương trình có hai nghiệm là: $x = 1$ và $x = \dfrac{1 - m}{m + 3}$.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình:

$$|x - 1| = mx - 1.$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 1 = mx - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ 1 - x = mx - 1 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x \geq 1 \\ (m-1)x = 0 \quad (1) \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ (m+1)x = 2 \quad (2) \end{cases} & (II) \end{bmatrix}$$

a. Giải và biện luận (I)

Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

(1) $\Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

$\Leftrightarrow$ hệ nghiệm đúng với mọi $x \geq 1$.

Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

(1) $\Leftrightarrow x = 0$ loại vì $x > 1 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

b. Giải và biện luận (II)

Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$(2) \Leftrightarrow 0x = 2$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{2}{m+1}.$$

Vì điều kiện $x \leq 1$, nên ta phải có:

$$\frac{2}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \geq 1 \\ m < -1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m+1}$.

Kết luận:

- Với $m = 1$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 1$.
- Với $-1 \leq m < 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m < -1 \vee m \geq 1$, phương trình có nghiệm là: $x = \frac{2}{m+1}$.

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình:

$$|mx - 1| = x - 2. \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ \begin{bmatrix} mx - 1 = x - 2 \\ mx - 1 = -x + 2 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{bmatrix} (m-1)x = -1 & (2) \\ (m+1)x = 3 & (3) \end{bmatrix} \end{cases}$$

a Giải và biện luận (2).

- Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

  $(2) \Leftrightarrow 0 = -1$ mâu thuẫn.

- Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

  $$(2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-m}.$$

Để nghiệm được chấp nhận cần có:

$$\frac{1}{1-m} \geq 2 \Leftrightarrow A = \frac{2m-1}{1-m} \geq 0. \qquad (2.1)$$

Ta có bảng xét dấu:

m	$-\infty$		1/2		1		$+\infty$
$2m - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - m$		$+$		$+$	0	$-$	
A		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Khi đó ta được điều kiện $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

b Giải và biện luận (3).

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

  $(3) \Leftrightarrow 0 = 3$ mâu thuẫn.

- Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

  $(3) \Leftrightarrow x = \frac{3}{m+1}$.

Để nghiệm được chấp nhận cần có:

$$\frac{3}{m+1} \geq 2 \Leftrightarrow B = \frac{1-2m}{m+1} \geq 0. \qquad (3.1)$$

Ta có bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$1-2m$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
B		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Khi đó ta được điều kiện $-1 < m \leq \frac{1}{2}$.

Kết luận:

- Với $m \leq -1 \vee m \geq 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $-1 < m < \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{m+1}$.
- Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x = 2$.
- Với $\frac{1}{2} < m < 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{1-m}$.

IV. SƠ LƯỢC PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình căn thức

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các phép biến đổi cơ bản sau:

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0$ (với điều kiện f(x), g(x) có nghĩa).
- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ có nghĩa và } g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

  (không cần đặt điều kiện $f(x) \geq 0$).
- $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}$

  (với điều kiện f(x), g(x), h(x) có nghĩa và không cần $h(x) \geq 0$).

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$\sqrt{m-2x}=\sqrt{x-1}\,. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 5$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$m-2x=x-1\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 3x=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=\dfrac{m+1}{3} \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Với $m = 5$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy với $m = 5$ phương trình có nghiệm $x = 2$.

b. Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (I) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{3}\ge 1 \Leftrightarrow m+1\ge 3 \Leftrightarrow m\ge 2.$$

Vậy với $m \ge 2$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+x+2}=3-x. \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ x^2+x+2=(3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ 7x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2. \qquad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})^2 = 9 \Leftrightarrow x-2+2\sqrt{(x-2)(x+1)}+x+1=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x+1)} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ (x-2)(x+1)=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 9x-27=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải và biện luận các phương trình:

a. $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-m}=2.$

b. $\dfrac{(m+1)x+m-2}{x+3}=m.$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|=2.$

☐ $x = 1.$ ☐ $x = 9.$ ☐ Khác.

b. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

☐ $1 \leq x \leq 2.$ ☐ $x = 5.$ ☐ Khác.

Bài tập 3: Giải và biện luận các phương trình:

a. $|mx+1| = |2x+m-3|.$

b. $|x-1| = mx+2m-1.$

c. $|mx+2| = 1-x$

Bài tập 4: Xác định m để các phương trình sau có nghiệm

a. $m^2(x-1) = 4x-3m+2$ với $x > 0.$

☐ $m > 1$ ☐ $m < -2$ ☐ Khác.

b. $2(|x|+m-1) = |x|-m+3.$

☐ $m \leq 5/3.$ ☐ $m \geq 5/3.$ ☐ Khác.

Bài tập 5: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x^2-3x+3} = 2-x.$

☐ $x = 1.$ ☐ $x = 0.$ ☐ Khác.

b. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2$.

☐ $x=2$. ☐ $x=1$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}}=\frac{m}{\sqrt{x-2}}.$$

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$\sqrt{m-x}=\sqrt{x+1}.$$

a. Giải phương trình với $m=7$.

☐ $x=2$. ☐ $x=3$. ☐ Khác.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

☐ $m>-1$. ☐ $m<-1$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Giải và biện luận phương trình.

$$\frac{x}{\sqrt{x+m}}=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Bài tập 9: Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{2x+m}{\sqrt{x-1}}-4\sqrt{x-1}=\frac{x-2m+3}{\sqrt{x-1}}.$$

VI. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. $x=1$ hoặc $x=9$.

b. $1\le x\le 2$ hoặc $x=5$.

Bài tập 4:

a. $m>1$ hoặc $m<-2$.

b. $m\le\frac{5}{3}$.

Bài tập 5:

a. $x=1$.

b. $x=1$.

Bài tập 7:

a. $x=3$.

b. $m>-1$.

CHỦ ĐỀ 2
BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUI VỀ BẬC NHẤT

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải và biện luận bất phương trình

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) > 0,$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \ ...$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét dấu từng nhị thức, từ đó suy ra dấu của biểu thức ở vế trái.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\frac{(2x-1)(3-x)}{x^2-5x+4} < 0.$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{(2x-1)(3-x)}{(x-1)(x-4)} < 0. \qquad (1)$$

Ta có:

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;

$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$;

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

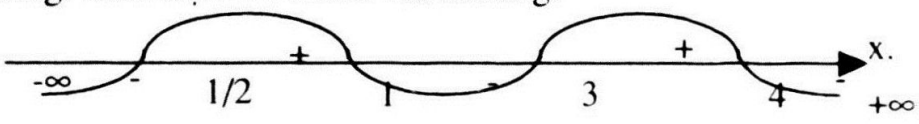
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Lập bảng xét dấu của (1):

x	$-\infty$		1/2		1		3		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	///	||	$-$	0	///	||	$-$	

Vậy, bất phương trình có tập hợp nghiệm là: $(-\infty, 1/2) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$.

Chú ý. Có thể giải bất phương trình trên bằng phương pháp sau đây gọi là phương pháp khoảng. Chia trục Ox thành các khoảng:



Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình

$$\frac{mx - m + 1}{x - 1} < 0. \qquad (1)$$

Giải.

Ta xét các trường hợp:

a. Nếu $m = 0$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ là nghiệm.}$$

b. Nếu $m > 0$.

Ta có:

$$mx - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m - 1}{m};$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{m-1}{m}$		1		$+\infty$
$mx - m + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Do đó nghiệm của bất phương trình là: $\frac{m-1}{m} < x < 1$.

c. Nếu $m < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{m-1}{m}$		1		$+\infty$
$mx - m + 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Do đó nghiệm của bất phương trình là: $x < \frac{m-1}{m} \vee x > 1$.

Kết luận:

- Với $m = 0$, bất phương trình có nghiệm là $x < 1$.
- Với $m > 0$, bất phương trình có nghiệm là $\frac{m-1}{m} < x < 1$.
- Với $m < 0$, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{m-1}{m} \vee x > 1$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận bất phương trình:

$$\frac{mx - 1}{x - m} \leq 1.$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{(m - 1)(x + 1)}{x - m} \leq 0. \qquad (1)$$

Ta xét các trường hợp:

a. Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{0(x+1)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \ne 1 \text{ là nghiệm.}$$

b. Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-m} \le 0,$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		m		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - m$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Do đó nghiệm của bất phương trình là: $-1 \le x < m$.

c. Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-m} \ge 0, \qquad (2)$$

Ta xét các khả năng sau:

- Nếu $-1 < m < 1$,

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		m		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - m$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Do đó nghiệm của bất phương trình là: $x \le -1 \vee x > m$.

- Nếu $m = -1$.

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \ne -1 \text{ là nghiệm.}$$

- Nếu $m < -1$,

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		m		-1		$+\infty$
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - m$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Do đó nghiệm của bất phương trình là: $x < m \vee x \ge -1$.

Kết luận:

- Với $m = 1$, bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \ne 1$.
- Với $m > 1$, bất phương trình có nghiệm là $-1 \le x < m$.
- Với $-1 < m < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x \le -1 \vee x > m$.
- Với $m = -1$, bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \ne -1$.
- Với $m < -1$, bất phương trình có nghiệm là $x < m \vee x \ge -1$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất chứa dấu trị tuyệt đối

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp thường dùng là khử dấu trị tuyệt đối bằng cách xét dấu nhị thức ax+b. Như vậy ta chia miền xác định của bất phương trình thành nhiều khoảng. Trên mỗi khoảng ta giải bất phương trình không chứa giá trị tuyệt đối.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$|2x - 4| \geq x + 1. \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 \text{ khi } x \geq 2 \\ 4 - 2x \text{ khi } x < 2 \end{cases}.$$

a. Trên khoảng $(-\infty, 2)$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow -2x + 4 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, 1]$.

b. Trên khoảng$[2, +\infty)$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 4 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $[5, +\infty)$.

Kết luận: nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình:

$$|x - 1| \geq x + m. \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ khi } x \geq 1 \\ 1 - x \text{ khi } x < 1 \end{cases}.$$

a. Trên khoảng $(-\infty, 1)$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow -x + 1 \geq x + m \Leftrightarrow 2x \leq 1 - m \Leftrightarrow x \leq \frac{1 - m}{2}.$$

- Với $\frac{1 - m}{2} < 1 \Leftrightarrow m > -1$

Nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, \frac{1 - m}{2})$.

- Với $\frac{1 - m}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$

Nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, 1]$.

b. Trên khoảng[1, +∞), ta có:

$(1) \Leftrightarrow x - 1 \geq x + m \Leftrightarrow m + 1 \leq 0.$

- Với $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$,

Nghiệm của bất phương trình là [1, +∞).

- Với $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$,

Bất phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m > -1$, nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, \frac{1-m}{2})$.
- Với $m \leq -1$, bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

III. SƠ LƯỢC BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Bài toán: Giải bất phương trình chứa căn thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dùng phép biến đổi tương đương. Các phép biến đổi quan trọng sử dụng định nghĩa để khử căn thức cho bất phương trình bao gồm:

Dạng 1: Với dạng: $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \leq f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Dạng 2: Với dạng: $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x-7} > 3$.

b. $\sqrt{2x-1} < 1$.

Giải.

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$x - 7 > 9 \Leftrightarrow x > 16.$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 16$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 3} > x - 1.$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0\\x^2-3\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}x-1\geq 0\\x^2-3>(x-1)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1\\|x|\geq\sqrt{3}\end{cases}\\\begin{cases}x\geq 1\\x>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq-\sqrt{3}\\x>2\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(2,+\infty)$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận bất phương trình:

$$(m+1)\sqrt{2-x}<1.$$

Giải.

Điều kiện $2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$.

Ta xét hai trường hợp:

Nếu $m+1\leq 0\Leftrightarrow m\leq -1$,

Khi đó nhận xét rằng

$VT\leq 0$,

$VP>0$,

lo đó bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$,

Khi đó nhận xét rằng hai vế bất phương trình dương, bình phương hai vế, ta được:

$$(m+1)^2(2-x)<1\Leftrightarrow (m+1)^2x>2(m+1)^2-1$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{2(m+1)^2-1}{(m+1)^2}=2-\frac{1}{(m+1)^2}<2.$$

Nên bất phương trình có nghiệm là: $2-\frac{1}{(m+1)^2}<x\leq 2$.

Tóm lại:

- Với $m\leq -1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m>-1$, bất phương trình có nghiệm là: $2-\frac{1}{(m+1)^2}<x\leq 2$.

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định m sao cho hai bất phương trình sau tương đương

$$(m+1)x-m-3>0,$$

$$(m-1)x-m-2>0.$$

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{(2x-1)(3-x)}{x^2-5x+4} < 0.$$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình:

a. $|2x-5| \le x+1$.

b. $|2x+1| < x$.

Bài tập 4: Giải các bất phương trình:

a. $|x-2| > x+1$.

b. $|x+2| \ge x+1$.

Bài tập 5: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $|x-2| \le x+m$.

b. $|mx-1| \le x+1$.

Bài tập 6: Giải và biện luận bất phương trình:

$$|ax+b| \le a.$$

Bài tập 7: Hãy xác định tất cả các giá trị của a, b sao cho mọi nghiệm của bất phương trình

$$|2x-a+1| \le b+1$$

cũng là nghiệm của bất phương trình

$$|x-b-1| \le 3b-2.$$

Bài tập 8: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{3x-1} > 3$.

b. $\sqrt{2-x} < 4$.

Bài tập 9: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x^2-3x+2} > x-1$.

b. $\sqrt{2x^2-x-1} < x$.

Bài tập 10: Giải và biện luận bất phương trình:

$$m\sqrt{1-x} < 1.$$

CHỦ ĐỀ 3
MỘT SỐ BÀI TOÁN
ĐƯA VỀ HỆ BẬC NHẤT

. ỨNG DỤNG 1

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để xét hai phương trình bậc hai có nghiệm chung

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi 2 phương trình bậc hai:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Bước 2: Đặt $x^2 = y$, ta được hệ:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1x + a_1y = c_1 \\ b_2x + a_2y = c_2 \end{cases} \quad (II)$$

Bước 3: Để 2 phương trình có nghiệm chung trước hết (II) phải có nghiệm thoả mãn $x^2 = y$, ta có điều kiện là:

$$\begin{cases} \begin{cases} D \neq 0 \\ \left(\dfrac{D_x}{D}\right)^2 = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \\ D = D_x = D_y = 0 \end{cases}$$

Bước 4: Thử lại

. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Với giá trị nào của m thì 2 phương trình sau có nghiệm chung

$2x^2 + mx - 1 = 0,$

$mx^2 - x + 2 = 0.$

Giải.

Các phương trình đã cho có nghiệm chung $\Leftrightarrow$ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ:

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ x - my = 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 - 2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -m \end{vmatrix} = -m - 4,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 1.$$

Vì $D \neq 0$, $\forall m$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m+4}{m^2+2}$ và $y = \dfrac{1-2m}{m^2+2}$.

Do $x^2 = y$, nên ta phải có:

$$\left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow m^3 + 6m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

Ví dụ 2: (Đề 74): CMR nếu 2 phương trình:

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$
$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

có nghiệm chung thì:

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) = 0. \qquad (*)$$

Giải.

Các phương trình có nghiệm chung ⇔ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + p_1x + q_1 = 0 \\ x^2 + p_2x + q_2 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ:

$$\begin{cases} p_1x + y = -q_1 \\ p_2x + y = -q_2 \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = p_1 - p_2;$$

$$D_x = q_2 - q_1;$$

$$D_y = p_2q_1 - p_1q_2.$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow p_1 - p_2 \neq 0 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ và $y = \dfrac{p_2q_1 - p_1q_2}{p_1 - p_2}$.

Do $x^2 = y$, nên ta phải có:

$$\left(\frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}\right)^2 = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{p_1 - p_2} \Leftrightarrow (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) = 0.$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$.

Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 - q_1 = 0 \\ p_2q_1 - p_1q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = q_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases}.$$

Khi đó (*) luôn đúng.

Vậy 2 phương trình có nghiệm chung thì: $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) = 0$.

I. ỨNG DỤNG 2

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để giải các hệ phương trình bậc cao, trị tuyệt đối, vô tỉ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Bằng phép đặt ẩn phụ ta có thể chuyển các hệ phương trình bậc cao, trị tuyệt đối, vô tỉ về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (cần lưu ý tới điều kiện cho các ẩn phụ).

Bước 2: Giải và biện luận hệ nhận được.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1:

a. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \quad (I)$$

b. Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{9}{y-2} = 100 \\ \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{7}{y-2} = 308 \end{cases} \quad (II)$$

Giải.

a. Giải hệ phương trình (I).

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 62,$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 50 & -9 \\ 154 & 7 \end{vmatrix} = 1736,$$

$$D_v = \begin{vmatrix} 5 & 50 \\ 3 & 154 \end{vmatrix} = 620.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $u = 28$ và $v = 10$.

b. Giải hệ phương trình (II).

Đặt

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x+3} = 2u \\ \dfrac{9}{y-2} = 2v \end{cases}.$$

Khi đó hệ (II) có dạng:

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 28 \\ v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x+3} = 56 \\ \dfrac{9}{y-2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{163}{56} \\ y = \dfrac{49}{20} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm $x = -\dfrac{163}{56}$ & $y = \dfrac{49}{20}$.

Chú ý. Trong nhiều trường hợp cần xác định điều kiện cho ẩn các phụ.

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m+1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2 \end{cases}.$$

Giải.

Đặt

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = u \\ \sqrt{y} = v \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Khi đó hệ (II) có dạng:

$$\begin{cases} mu + v = m + 1 \\ ux + mv = 2 \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1,$$

$$D_u = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2,$$

$$D_v = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

a. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

- Hệ có nghiệm duy nhất $u = \dfrac{m+2}{m+1}$ và $v = \dfrac{1}{m+1}$.

Vì điều kiện u, v ≥ 0, nên ta phải có:

$$\begin{cases} \dfrac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \dfrac{1}{(m+1)^2} \end{cases}.$$

b. Nếu D = 0

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

- Với m = 1, suy ra $D_u = D_v = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$.
- Với m = −1, suy ra $D_u = -2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với m > −1, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{2m+3}{(m+1)^2} \text{ và } y = \frac{1}{(m+1)^2}.$$

- Với m = 1, hệ phương trình có vô số nghiệm thoả mãn $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$.
- Với m = −1, hệ phương trình vô nghiệm.

ỨNG DỤNG 3

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 3. (*Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng*): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình tổng quát:

(d_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

(d_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Tuỳ theo giá trị của tham số hãy xác định vị trí tương đối của (d_1), (d_2)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \quad (I)$$

Bước 2: Bằng việc biện luận (I) ta có được vị trí tương đối của (d_1) và (d_2), thể:

- Nếu (I) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow (d_1)//(d_2).$$

- Nếu (I) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{M(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})\}.$$

- Nếu (I) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2).$$

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (Đề 50): Cho $a^2 + b^2 > 0$ và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trì

(d_1): $(a - b)x + y = 1$,

(d_2): $(a^2 - b^2)x + ay = b$.

a. Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b. Tìm điều kiện của a, b để giao điểm đó thuộc trục hoành.

Giải.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} (a-b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2-b^2 & a \end{vmatrix} = b^2 - ab,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2-b^2 & b \end{vmatrix} = ab - a^2.$$

Vậy, $(d_1) \cap (d_2) = I$

$\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow b^2 - ab \neq 0$,

Khi đó giao điểm I có toạ độ $I(-\frac{1}{b}, \frac{a}{b})$.

b. Điểm $I \in Ox$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - ab \neq 0 \\ \frac{a}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: (Đề 136 – Va): Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $kx - y + k = 0$,

(d_2): $(1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$.

a. CMR khi k thay đổi đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của k, hãy xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

c. Tìm quĩ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

Giải.

a. Gọi M(x, y) là điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua với $\forall k$

$\Leftrightarrow kx - y + k = 0$, với $\forall k$

$\Leftrightarrow (x + 1)k - y = 0$, với $\forall k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định M(−1, 0).

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{cases} kx - y = -k \\ (1 - k^2)x + 2ky = 1 + k^2 \end{cases}.$$

Ta có:

$D = 1 + k^2$,

$D_x = 1 - k^2$,

$D_y = 2k$.

Vì $D \neq 0$ với $\forall k$ do đó hệ luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2k}{1 + k^2} \end{cases}$$

Vậy (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau tại I có toạ độ: $I\left(\dfrac{1 - k^2}{1 + k^2}, \dfrac{2k}{1 + k^2}\right)$.

c. Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \dfrac{2k}{1 + k^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1 + k^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy, quĩ tích của giao điểm I của (d_1) và (d_2) thuộc đường tròn

$x^2 + y^2 = 1$.

IV. ỨNG DỤNG 4

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đây là kiến thức nâng cao bởi nó có liên quan tới tam thức bậc hai, do đó để có thể nắm bắt được kiến thức về vấn đề này cần biết thêm:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ với } a > 0$$

luôn có:

$$y \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Bài toán 4: (*Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để biện luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức hai ẩn*): Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2$$

theo tham số (giả sử là m).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hai đường thẳng

$$(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$(d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}.$$

Xác định các giá trị D, D_x, D_y.

Bước 3: Xét hai trường hợp:

a. Nếu $D \neq 0$

$$\Leftrightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất } x = \frac{D_x}{D} \text{ và } y = \frac{D_y}{D}.$$

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó $\min F = 0$.

b. Nếu $D = 0$

Đặt $t = a_1x + b_1y + c_1$, ta được :

$$F = 2t^2 + At + B \geq -\frac{\Delta}{4}.$$

Vậy $\min F = -\frac{\Delta}{4}$, đạt được khi $t = -\frac{A}{4} \Rightarrow a_1x + b_1y + c_1 = -\frac{A}{4}$.

Bước 4: Kết luận:

- Với $\underline{D \neq 0}$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.
- Với $\underline{D = 0}$, $\min F = -\frac{\Delta}{4}$, đạt được khi x, y thuộc đường thẳng có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = -\frac{\Delta}{4}$.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (x + y - 2)^2 + (x + ay - 3)^2$$

theo a.

Giải.

Xét hai đường thẳng

(d_1): $x - y + 2 = 0$,

(d_2): $x - ay + 3 = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + ay = 3 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

a. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2a - 3}{a - 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{1}{a - 1} \end{cases}$$

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó $\min F = 0$.

b. Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Với $a = 1$, suy ra $D_x = -1 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Khi đó (d_1) song song (d_2) và ta được:

$$F = (x + y - 2)^2 + (x + y - 3)^2.$$

Đặt $t = x + y - 2$, ta được

$$F = t^2 + (t - 1)^2 = 2t^2 - 2t + 1 \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy $\min F = \dfrac{3}{4}$, đạt được khi

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 2y - 5 = 0.$$

Kết luận:

- Với $a \neq 1$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = \frac{2a-3}{a-1}$ và $y = \frac{1}{a-1}$.
- Với $a = 1$, $\min F = \frac{3}{4}$, đạt được khi x, y thuộc đường thẳng có phương trình $2x + 2y - 5 = 0$.

Ví dụ 2: (Đề 8) Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$$

theo a.

Giải.

Xét hai đường thẳng

(d_1): $x - 2y + 1 = 0$,

(d_2): $2x + ay + 5 = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2)

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + ay = -5 \end{cases}$$

Ta có:

$D = a + 4$, $D_x = -a - 10$, $D_y = -3$.

a. Nếu $D \neq 0$

$\Leftrightarrow a + 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4$.

Hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+10}{a+4} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{a+4} \end{cases}$$

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó $\min F = 0$.

b. Nếu $D = 0$

$\Leftrightarrow a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

Với $a = -4$, suy ra $D_x = -6 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Khi đó (d_1) song song (d_2) do đó

$$F = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2.$$

Đặt $t = x - 2y + 1$, ta được

$$F = t^2 + 4(t + \frac{3}{2})^2 = 5t^2 + 12t + 9 \geq \frac{9}{5}.$$

Vậy $\min F = \frac{9}{5}$, đạt được khi

$$t = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x - 2y + 1 = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5x - 10y - 11 = 0.$$

Kết luận:

- Với $a \neq -4$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = -\frac{a+10}{a+4}$ và $y = -\frac{3}{a+4}$.
- Với $a = -4$, $\min F = \frac{9}{5}$, đạt được khi x, y thuộc đường thẳng có phương trình $5x - 10y - 11 = 0$.

ỨNG DỤNG KHÁC

dụ 1: Hãy xác định tất cả các giá trị của a, b sao cho nghiệm của bất phương h:

$|x - a + 1| \leq 2b + 3$ là đoạn $[-2, 5]$.

Giải.

Nếu $2b + 3 < 0 \Leftrightarrow b < -\frac{3}{2}$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $2b + 3 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{3}{2}$ thì bất phương trình được viết lại dưới dạng:

$$-2b - 3 \leq x - a + 1 \leq 2b + 3 \Leftrightarrow a - 2b - 4 \leq x \leq a + 2b + 2.$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình là đoạn $[-2, 5]$ điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} a - 2b - 4 = -2 \\ a + 2b + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy với $a = \frac{5}{2}$ và $b = \frac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện dầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

i tập 1. Với giá trị nào của m cặp phương trình sau có nghiệm chung

$$x^2 + 5x + m = 0,$$
$$x^2 + 2mx + m^2 - 4m + 25 = 0.$$

i tập 2. Với giá trị nào của m cặp phương trình sau có nghiệm chung

$$2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0,$$
$$6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0.$$

i tập 3. (ĐH Thái Nguyên 2000): Với giá trị nào của a cặp phương trình sau có iệm chung

$$ax^2 + x + 1 = 0,$$
$$x^2 + ax + 1 = 0.$$

i tập 4. Với giá trị nào của a cặp phương trình sau có nghiệm chung

$$x^2 + ax + ac = 0,$$
$$x^2 - ax + c^2 = 0.$$

Bài tập 5. Cho $a^2 + b^2 > 0$ và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $ax + by = a + b$;

(d_2): $bx + ay = a - b$.

a. Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b. Tìm quỹ tích toạ độ giao điểm khi a, b thay đổi.

Bài tập 6. Hãy xác định tất cả các giá trị của a, b sao cho nghiệm của tất phương trình:

$$|x - 2a + 1| \le b + 1$$

là đoạn $[-2, 5]$.

Bài tập 7. Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (2x + y - 2)^2 + (4x + ay - 1)^2$$

theo a.

Bài tập 8. (HVNH – 2001): Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (x + my - 2)^2 + [4x + 2(m - 2)y - 1)^2$$

theo m.

PHẦN VI

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẬC HAI

CHƯƠNG I

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trường hợp 1. Với $a = 0$

Phương trình có dạng:

$$bx + c = 0 \Leftrightarrow bx = -c. \quad (2)$$

a. Nếu $b = 0$.

$$(2) \Leftrightarrow 0 = -c \Leftrightarrow c = 0.$$

- Nếu $c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Nếu $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $b \neq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}: \text{phương trình có nghiệm duy nhất.}$$

Trường hợp 2. Với $a \neq 0$

Ta tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc nếu $b = 2b'$ tính $\Delta' = (b')^2 - ac$).

a. Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$).

Phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$).

Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x_0 = -\frac{b'}{a}$).

c. Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\text{)}.$$

Kết luận:

- Với $a = b = c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = b = 0$ và $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{c}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x_0 = -\frac{b'}{a}$.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\text{).}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình:

$$x^2 - 2mx + 2m^2 = 0. \quad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$\Delta' = m^2 - 2m^2 = -m^2 \leq 0, \forall m.$$

- Với $m = 0 \Rightarrow \Delta' = 0$, do đó phương trình có nghiệm kép $x = 0$.
- Với $m \neq 0 \Rightarrow \Delta' < 0$, do đó phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình:

$$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0. \quad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 + 2m = 1 > 0, \forall m.$$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = m - 2 \text{ và } x_2 = m.$$

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình:

$$mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0. \quad (1)$$

Giải.

Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1. Nếu $m = 0$

Phương trình có dạng:

$$4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Trường hợp 2. Nếu $m \neq 0$

Ta đi tính biệt thức $\Delta' = 4 - m$.

a. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$.

Phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = \frac{1}{2}$.

c. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{4 - m}}{m}$.

Kết luận:

- Với m = 0, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{4}$.
- Với m = 4, phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = \frac{1}{2}$.
- Với m > 4, phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $0 \neq m < 4$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{4 - m}}{m}$.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình:

$$ax^2 - 2ax + a - b = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. Nếu a = 0

Phương trình có dạng:

$$-b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

- Nếu b = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 0$

Ta đi tính biệt thức $\Delta' = ab$.

a. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Phương trình (1) vô nghiệm.

d. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = 1$.

e. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{ab}}{a}$.

Kết luận:

- Với a = b = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với a = 0 và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

- Với $ab < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = 1$.
- Với $ab > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{ab}}{a}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải và biện luận các phương trình:

a $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2m + 2 = 0.$

b $x^2 + mx - 2 = 0.$

c $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 4 = 0.$

Bài tập 2: Giải và biện luận các phương trình:

a $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0.$

b $(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 = 0.$

c $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0.$

Bài tập 3: Giải và biện luận các phương trình:

a $(4m + 1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0.$

b $2mx^2 - 2(m\sqrt{2} - 1)x + m = 0.$

Bài tập 4: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x}{m - 1} = \frac{2}{x + 1}.$$

CHỦ ĐỀ 2
DÙNG ĐỒ THỊ
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình

$$f(x, m) = 0. \quad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chuyển phương trình về dạng:

$$ax^2 + bx = g(m) \quad (2)$$

Khi đó số nghiệm của phương trình là số giao điểm của Parabol (P): $y = ax^2 + bx$ và đường thẳng $y = g(m)$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

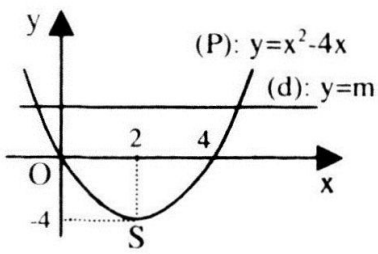
Ví dụ 1: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x - m = 0. \quad (1)$$

Giải.

Chuyển phương trình về dạng:

$$x^2 - 4x = m \quad (2)$$



Khi đó số nghiệm của phương trình là số giao điểm của Parabol (P): $y = x^2 - 4x$ và đường thẳng (d): $y = m$.

Ta được:

- Với $m < -4$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -4$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 2$.
- Với $m > -4$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

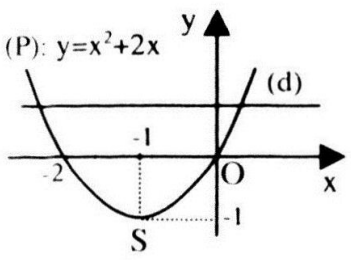
Ví dụ 2: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x^2 \quad - 3m^2 + 4m = 0. \quad (1)$$

Giải.

Chuyển phương trình về dạng:

$$x^2 + 2x = 3m^2 - 4m \quad (2)$$



Khi đó số nghiệm của phương trình là số giao điểm của Parabol (P): $y = x^2 + 2x$ và đường thẳng (d): $y = 3m^2 - 4m$.

Ta được:

- Với $3m^2 - 4m < -1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < 1$.

  Phương trình vô nghiệm.

- Với $3m^2 - 4m = -1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \vee m = 1$.

  Phương trình có nghiệm kép.

- Với $3m^2 - 4m > -1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \vee m > 1$.

  Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

a. $x^2 - 2x - m = 0$.

b. $x^2 + 4x - 3m + 2 = 0$.

Bài tập 2: Biện luận theo m số nghiêm của phương trình:

a. $-x^2 + 4x + m^2 - 5m = 0$.

b. $mx^2 + 2mx - m + 1 = 0$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 2x = m,$$

từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ rồi suy ra kết quả biện luận.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 + 4x = 3m - 2,$$

từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x$ rồi suy ra kết quả biện luận.

Bài tập 2:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 4x = m^2 - 5m,$$

từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x$ rồi suy ra kết quả biện luận.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$m(x^2 + 2x) = m - 1,$$

Nhận xét rằng:

- Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq 0$, ta được:

$$x^2 + 2x = \frac{m-1}{m}$$

từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ rồi suy ra kết quả biện luận.

CHỦ ĐỀ 3

ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chuyển bài toán về việc xét dấu của Δ.

Hướng 2: Dựa trên kết quả của định lí:

Định lí: Cho tam thức bậc hai:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

a. Nếu tìm được số α để $af(\alpha) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Nếu $af(\alpha) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$.

b. Nếu tìm được 2 số α, β để $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Nếu $f(\alpha)f(\beta) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và một nghiệm thuộc khoảng (α, β).

Lưu ý: Nếu hệ số a của x^2 có thể triệt tiêu thì xét thêm trường hợp $a = 0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình:

$$mx^2 + 2(m - 1)x - 2 = 0$$

có nghiệm duy nhất.

Giải.

Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1: Với $m = 0$

Phương trình có dạng:

$$-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghệm duy nhất.

Ví dụ 2: CMR với $a^2 + b^2 > 0$ phương trình

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$

luôn có nghiệm.

Giải.

Điều kiện $x \neq 0, 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$f(x) = x^2 - (1 + a^2 + b^2)x + a^2 = 0. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\Delta = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 = (1 + a^2 + b^2 - 2a)(1 + a^2 + b^2 + 2a)$$

$$= [b^2 + (a - 1)^2][b^2 + (a + 1)^2] > 0.$$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta đi kiểm tra điều kiện $x \neq 0, 1$, ta có:

$$f(0) = a^2 \text{ và } f(1) = -b^2.$$

Do a, b không đồng thời bằng 0 nên ít nhất một trong hai giá trị f(0) và f(1) khác 0. Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0. \qquad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0. \qquad (2)$$

Biết rằng $ac \geq 2(b + d)$. CMR ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

Giải.

Ta có:

$$\Delta_{(1)} = a^2 - 4b,$$

$$\Delta_{(2)} = c^2 - 4d.$$

Nhận xét rằng:

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a^2 - 4b + c^2 - 4d = (a^2 + c^2) - 4(b + d)$$

$$\geq 2ac - 4(b + d) \geq 4(b + d) - 4(b + d) = 0.$$

Vậy, ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ không âm $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

Ví dụ 4: Không tính Δ chứng tỏ các phương trình sau đây có hai nghiệm

a. $x^2 - 27x + 3 = 0.$

b. $(m^2 + 1)x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0.$

Giải.

a. Ta có

$$af(1) = 1 - 27 + 3 = -23 < 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và $x_1 < 1 < x_2$.

b. Ta có

$af(0) = -m^2 - 1 < 0$ với mọi m.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ và $x_1 < 0 < x_2$.

Ví dụ 5: Không tính Δ chứng tỏ các phương trình sau đây có nghiệm

a. $x^2 - 7x + 3 = 0$.

b. $(m^2 - 1)x^2 + (m^2 + 1)x + 1 = 0$.

Giải.

a. Ta có:

$f(0).f(1) = 3.(-3) = -9 < 0$.

Vậy phương trình có nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

b. Ta có:

$f(1) = (m^2 - 1).1 + (m^2 + 1).1 + 1$,

$f(-1) = (m^2 - 1).(-1)^2 + (m^2 + 1).(-1) + 1$

$\Rightarrow f(-1).f(1) = -(2m^2 + 1) < 0$.

Vậy phương trình có nghiệm thuộc khoảng (−1, 1).

Ví dụ 6: Cho a, b, c là ba số dương phân biệt. CMR phương trình:

$$a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - b)(x - a) = 0$$

có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $a < b < c$ và đặt:

$f(x) = a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - b)(x - a)$

Ta có:

$f(b) = b(b - a)(b - c) < 0$

và hệ số x^2 của $f(x)$ bằng $a + b + c > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 7: Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số thực bất kỳ thoả mãn:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

CMR phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cách 1. Ta có:

$f(0) = c$,

$mf(1) = ma + mb + mc$,

$(m + 1)^2 f\left(\frac{m}{m+1}\right) = m^2a + m(m + 1)b + (m + 1)^2c$.

Suy ra:

$$f(0) + mf(1) + (m+1)^2 f\left(\frac{m}{m+1}\right) = m(m+1)(m+2)\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right] =$$

$$\Leftrightarrow af(0) + maf(1) + (m+1)^2 af\left(\frac{m}{m+1}\right) = 0 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $\exists \alpha \in \{0, \frac{m}{m+1}, 1\}$ để $af(\alpha) \le 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

Cách 2. Ta có:

$$f(0) = c,$$

$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right] = \frac{-c}{m(m+2)}.$$

Suy ra:

$$f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{-c^2}{m(m+2)} \le 0 \Rightarrow \text{phương trình có nghiệm.}$$

Chú ý. Nếu bài toán yêu cầu chứng minh: "phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0, 1)" ta cần xét hai trường hợp $c = 0$ và $c \neq 0$.

Ví dụ 8: Cho hai phương trình:

$$x^2 + x + a = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + ax + 1 = 0 \qquad (2)$$

a. Với giá trị nào của a thì hai phương trình có nghiệm chung.

b. Với giá trị nào của a thì hai phương trình tương đương.

Giải.

a. Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0, khi đó:

$$x_0^2 + x_0 + a = 0 \qquad (3)$$

$$x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \qquad (4)$$

Lấy (3) – (4), ta được:

$$(1-a)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ x_0 = 1 \end{bmatrix}.$$

- Với $a = 1$, dễ thấy cả hai phương trình đều vô nghiệm, do vậy $a = 1$ loại
- Với $x_0 = 1$, thay vào (3) được $a = -2$.

Khi đó hai phương trình có dạng:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Dễ thấy chúng chỉ có một nghiệm chung là $x = 1$.

b. Hai phương trình tương đương nếu xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) và ngược lại.
- Hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Theo a) khả năng thứ nhất không thể xảy ra.

Vậy, chỉ có thể là hai phương trình đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ a^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a < 2$$

Vậy, với $\frac{1}{4} < a < 2$ hai phương trình đã cho tương đương.

Ví dụ 9: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_1.

a. CMR phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_2.

b. CMR $x_1 + x_2 \geq 2$.

Giải.

Theo giả thiết ta được:

$$\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương.

Do x_1 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nên

$$a x_1^2 + bx_1 + c = 0$$

$$\xleftarrow{x_1^2 \neq 0} a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1^2}\right) = 0.$$

Vậy $\frac{1}{x_1}$ là nghiệm dương của phương trình

$$cx^2 + bx + a = 0,$$

nên $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Do đó:

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2, \text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Không tính Δ chứng tỏ các phương trình sau đây có hai nghiệm

a. $x^2 - 14x + 24 = 0$.

b. $(m^2 - 1)x^2 - 2mx + 1 = 0$

Bài tập 2: CMR với mọi a, b, c phương trình:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

luôn luôn có nghiệm.

Bài tập 3: Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. CMR phương trình:

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

vô nghiệm.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Ta có $af(-3) = -9 < 0$, nên phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 < -3 < x_2$.

b. Với $m = 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

Với $m \neq 0$, ta có $f(\frac{1}{m}) = -\frac{1}{m^2} < 0$, nên phương trình có 2 nghiệm thoả mãn

$x_1 < \frac{1}{m} < x_2$.

Bài tập 2: Không mất tổng quát ta giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó:

$$f(a).f(b) = -(a - b)^2(a - c)(b - c) \leq 0,$$

suy ra phương trình luôn có ít nhất một nghiệm thuộc [a, b].

Bài tập 3: Ta có:

$$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$$
$$= [(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2]$$
$$= (b - c - a)(b - c + a)(b + c - a)(b + c + a) < 0$$

bởi trong một tam giác tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh còn lại.

Vậy phương trình vô nghiệm.

CHỦ ĐỀ 4
ĐỊNH LÍ VIÉT VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. ĐỊNH LÍ VIÉT

Định lí: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Ghi chú:

a. Nếu $a + b + c = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = c/a \end{cases}.$$

b. Nếu $a - b + c = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -c/a \end{cases}.$$

Chú ý. Trước khi áp dụng định lí Viét cần tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

II. ỨNG DỤNG 1

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nếu hai số u và v có:

$$\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$$

thì u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - St + P = 0. \qquad (1)$$

Chú ý: Nếu (1) có hai nghiệm t_1, t_2 (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$) thì ta được:

$$\begin{cases} u = t_1 \text{ và } v = t_2 \\ u = t_2 \text{ và } v = t_1 \end{cases}.$$

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng 6m và diện tích bằng $2m^2$.

Giải.

Gọi u, v là hai cạnh của hình chữ nhật ($u > 0, v > 0$), ta có:

$$\begin{cases} 2u + 2v = 6 \\ u.v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u.v = 2 \end{cases},$$

thì u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy, độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là 1m và 2m.

Ví dụ 2: Tìm phương trình bậc hai nhận x_1, x_2 làm nghiệm, biết:

a $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$.

b $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 13 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases}$.

Giải.

a. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

b. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 13 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 25 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \pm 5 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 - 5x + 6 = 0. \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 + 5x + 6 = 0. \end{cases}$$

III. ỨNG DỤNG 2

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 2. Tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2.

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P.$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}.$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP.$
- $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giả sử phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. Hãy lập phương trình có nghiệm là:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. $2x_1$ và $2x_2$.

c. x_1^2 và x_2^2.

d. x_1+x_2 và $x_1.x_2$.

e. $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Giải.

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

a. Ta có:

$$\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -S \\ (-x_1).(-x_2) = P \end{cases}$$

hì $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax^2 - bx + c = 0.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2S \\ 2x_1.2x_2 = 4P \end{cases}$$

hì $2x_1$ và $2x_2$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2Sx + 4P = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{b}{a}x + 4\frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2bx + 4c = 0.$$

c. Ta có:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2 . x_2^2 = P^2 \end{cases}$$

thì x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (S^2 - 2P)x + P^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a})x + \frac{c^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0.$$

d. Ta có:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1 . x_2 = S + P \\ (x_1 + x_2) . x_1 . x_2 = S.P \end{cases}$$

thì $x_1 + x_2$ và $x_1 . x_2$ là nghiệm của:

$$x^2 - (S + P)x + SP = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-\frac{b}{a} + \frac{c}{a})x - \frac{b}{a} . \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax^2 + a(b - c)x - bc = 0.$$

e. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \\ \frac{1}{x_1} . \frac{1}{x_2} = \frac{1}{P} \end{cases}$$

thì $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - \frac{S}{P}x + \frac{1}{P} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow cx^2 + bx + a = 0.$$

Ví dụ 2: Giả sử phương trình

$$x^2 - ax + 1 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2.

a. Hãy tính tổng $S_7 = x_1^7 + x_2^7$.

b. Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên nhận $\alpha = \sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{4}$ là nghiệm.

Giải.

Phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = a \\ P = x_1 . x_2 = 1 \end{cases}$$

a. Ký hiệu $S_k = x_1^k + x_2^k$. Ta lần lượt có:

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2.$

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = a^3 - 3a.$

$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2.$

$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^3 x_2^3 (x_1 + x_2) = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.$

b. Đặt $x_1 = \sqrt[7]{3}$, $x_2 = \sqrt[7]{4}$.

Theo câu a) thì với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$$x^2 - ax + 1 = 0,$$

ta có:

$$x_1^7 + x_2^7 = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a \Leftrightarrow a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a - 7 = 0.$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - 7 = 0.$$

Ví dụ 3: (CĐSP HN - 99): Cho phương trình:

$$x^2 - 2kx - (k - 1)(k - 3) = 0.$$

CMR với mọi k, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 thoả mãn

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

Giải.

Ta có:

$$\Delta' = 1 + (k - 1)(k - 3) = k^2 - 4k + 4 = (k + 2)^2 \geq 0, \forall k$$

do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 , x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1.x_2 = -(k - 1)(k - 3) \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = \frac{1}{4}(2k)^2 - (k - 1)(k - 3) - 2.2k + 3 = 0 \text{ đpcm.}$$

IV. ỨNG DỤNG 3

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 3. Tìm hệ thức liện hệ giữa các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không phụ thuộc vào tham số

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm hệ thức liện hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số (giả sử tham số là m), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2 : Ádụng định lí Viét, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m). \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3 : Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Giải.

Trước hết t cần đi tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}. \qquad (*)$$

- Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-5}{m-1} \end{cases} \qquad (I)$$

- Khử m từ hệ (I) ta được:

$$2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1,$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Chú ý. Trong nhiều trường hợp, việc khử tham số từ hệ (I) cần sử dụng các hằng đẳng thức, đặc biệt là các hằng đẳng lượng giác, cụ thể:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

$tg\alpha.cotg\alpha = 1.$

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$$

a. CMR với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.

Giải.

a. Ta có:

$$\Delta' = \sin^2\alpha - \cos\alpha + 1 = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha) \geq 0, \forall\alpha.$$

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sin\alpha \quad (1) \\ x_1.x_2 = \cos\alpha - 1 \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

b. Khử α từ hệ (I) bằng cách rút $\sin\alpha$ từ (1) và $\cos\alpha$ từ (2) thay vào hằng đẳng thức:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

ta được:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1.$$

Đó chính là hệ thức cần tìm.

Chú ý. Ta có công thức đại số hoá:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ với } t = tg\frac{\alpha}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$(1 + m^2)x^2 - 2mx + 1 - m^2 = 0.$$

a. CMR với mọi $m > 1$ phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

Giải.

a. Ta có:

$$\Delta' = m^2 - (1 + m^2)(1 - m^2) = m^4 + m^2 - 1 > 0, \forall m > 1.$$

Vậy, với mọi $m > 1$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \end{cases} \quad (I)$$

b. Khử m từ hệ (I) bằng nhận xét:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 = 1$$

Vậy:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

V. ỨNG DỤNG 4

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 4. Xét dấu các nghiệm của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dùng định lí Viét ta có thể xét dấu được các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ta có:

- Khi $P = -\dfrac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$.
- Khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- Khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2$.
- Khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0$.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m > 0 \\ 1 - m > 0 \\ 2(m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 2: Tuỳ theo m hãy xét dấu các nghiệm của phương trình:

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0.$$

Giải.

Ta đi xác định các giá trị của Δ', S, P:

$$\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 2)(m - 5) = 9m - 9,\ S = \frac{2(m+1)}{m-2} \text{ và } P = \frac{m-5}{m-2}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	P	S	Dấu các nghiệm
$-\infty$				
	−	+	+	Phương trình vô nghiệm
−1			0	
	−	+	−	
1	0			Phương trình có nghiệm kép $x = -2 < 0$
	+	+	−	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 < x_2 < 0$
2	‖	‖	‖	Phương trình có một nghiệm $x = -1/2 < 0$
	+	−	+	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ và $x_2 < \lvert x_1 \rvert$
5		0		Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0 = x_1 < x_2$
	+	+	+	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0 < x_1 < x_2$
$+\infty$				

VI. ỨNG DỤNG 5

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 5. Tìm tham số để phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng định lí Viét, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 . x_2 = g(m) \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3: Biểu diễn điều kiện K thông qua (I).

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2.$$

Giải.

Phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3. \quad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$$

Suy ra:

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Leftrightarrow 4.\frac{2(m-1)}{m+1} = 7.\frac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6 \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy với $m = -6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2. CMR hệ thức:

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc \quad (*)$$

là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.

Giải.

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad (I)$$

Xét biểu thức:

$$P = (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = x_1x_2 + x_1^2 x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3)$$

$$= x_1x_2 + x_1^2 x_2^2 - [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)]$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \left[-\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{c}{a}.\frac{b}{a} \right] = \frac{b^3 + a^2c + ac^2 - 3abc}{a^3} = 0.$$

Vậy với (*) thì 1 trong hai thừa số của P phải bằng 0 và ngược lại (đpcm).

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình:

$$mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$$

có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Giải.

Trước hết điều kiện phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \neq 0. \qquad (*$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{m+1}{m} \end{cases}.$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m+1)}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m = -2/3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Giả sử phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. CMR hệ thức:

$$(k+1)^2 ac - kb^2 = 0 \ (k \neq 0)$$

là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

Giải.

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}. \qquad (I)$$

Xét

$$P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) + k^2 x_1x_2$$

$$= x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] + k^2 x_1x_2$$

$$= \frac{c}{a} - k\left[\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right] + k^2\frac{c}{a} = \frac{(k+1)^2 ac - kb^2}{a^2}.$$

Vậy, nếu $(k+1)^2 ac - kb^2 = 0$ thì một trong hai thừa số của P phải bằng 0 v. ngược lại. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Cho hai phương trình

$$x^2 + ax + bc = 0, \quad (*)$$

$$x^2 + bx + ca = 0. \quad (**)$$

Giả sử a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và $c \neq 0$. CMR nếu phương trình (*) và phương trình (**) có đúng một nghiệm chung, thì nghiệm khác của các phương trình đó thoả mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

Giải.

- Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0, khi đó:

$$x_0^2 + ax_0 + bc = 0 \quad (1)$$

$$x_0^2 + bx_0 + ca = 0 \quad (2)$$

Lấy (1) − (2), ta được:

$$(a - b)(x_0 - c) = 0 \Leftrightarrow x_0 = c \vee a = b \ (l).$$

- Phương trình thứ nhất có các nghiệm x_0, x_1.

Khi đó:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -a \\ x_0 . x_1 = bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b \\ c = -a - b \end{cases}$$

- Phương trình thứ hai có các nghiệm x_0, x_2.

Khi đó:

$$\begin{cases} x_0 + x_2 = -b \\ x_0 . x_2 = ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = a \\ c = -a - b \end{cases}$$

- Vậy, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + b = -c \\ x_1 . x_2 = ab \end{cases}$$

thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + cx + ab = 0. \quad (3)$$

Ta khẳng định rằng phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Thật vậy:

$$\Delta_{(3)} = c^2 - 4ab = (-a - b)^2 - 4ab = (a - b)^2 > 0, \ \forall a \neq b.$$

VII. ỨNG DỤNG 6

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 6: Giải một số bài toán hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong mục này ta đi ứng dụng định lí Viét vào việc giải một số bài toán về hàm số.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Parabol (P) có phương trình

$$(P): y = x^2.$$

Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1, 2. Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải.

Cách 1. Cách giải thông thường

Từ giả thiết, ta được: A(−1, 1) và B(2, 4).

Phương trình đường thẳng AB được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1,1) \\ \text{qua } B(2,4) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow (AB): x - y + 2 = 0.$$

Cách 2. Ứng dụng định lý Viét

Giả sử phương trình đường thẳng (AB): $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (AB) và (P) là:

$$x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

Ta có: $x_A = -1$ và $x_B = 2$ là nghiệm của phương trình và theo Viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B = a \\ x_A . x_B = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình (AB): $y = x + 2$.

Ví dụ 2: Cho Parabol (P) có phương trình

$$(P): y = \frac{x^2}{4},$$

A là điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2. Viết phương trình tiếp tuyến với (P) tại A.

Giải.

Cách 1. Cách giải thông thường

Từ giả thiết, ta được A(2, 1).

Giả sử phương trình tiếp tuyến với (P) tại A có dạng:

$$(d): y = ax + b.$$

- Điểm $A \in (d)$

$$\Leftrightarrow 2a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - 2a. \quad (1)$$

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$\frac{x^2}{4} = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 \quad (2)$$

Để (d) tiếp xúc với (P)

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b = 0. \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta được $a = 1$ và $b = -1$.

Vậy, phương trình tiếp tuyến (d): $y = x - 1$.

Cách 2. Ứng dụng định lý Viét

Giả sử phương trình tiếp tuyến tại A là (d): $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$\frac{x^2}{4} = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0. \qquad (*)$$

Ta có: $x_A = 2$ là nghiệm kép của (*) ($x_1 = x_2 = 2$) và theo Viét ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4a \\ x_1.x_2 = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình (AB): $y = x - 1$.

VIII. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để phương trình

$$x^2 + 2(m + 1)x + 2m + 3 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau.

a. $-2x_1$ và $-2x_2$.

b. $3x_1$ và $3x_2$.

c. $-x_1^2$ và $-x_2^2$.

d. $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

e. $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$.

Bài tập 2: Tìm m để phương trình

$$x^2 + 2mx + 4 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó

a. Tính theo m giá trị các biểu thức :

$$E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

☐ $E = \sqrt{4 - 2m}$. ☐ $E = \sqrt{2m - 4}$. ☐ Khác.

$$F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}.$$

☐ $F = \sqrt{\sqrt{2m - 4} + 2\sqrt{2}}$. ☐ $F = \sqrt{\sqrt{4 - 2m} + 2\sqrt{2}}$ ☐ Khác.

b. Xác định m sao cho:

$$x_1^4 + x_2^4 \le 16.$$

☐ $1 \le m \le \sqrt{3}$. ☐ $1 \le |m| \le \sqrt{3}$. ☐ Khác.

c. Xác định m sao cho:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \ge 4.$$

☐ $0 \le |m| \le 2$. ☐ $0 \le m \le 2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho phương trình

$$(m + 1)x^2 - (m - 1)x + m - 2 = 0.$$

a. Giải và biện luận phương trình theo tham số m.

b. Xác định m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 1

☐ $m = 1$. ☐ $m = -2$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho phương trình

$$(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$$

a. Giải và biện luận phương trình theo tham số m.

b. Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

☐ $2 < m < 5/2$. ☐ $m < -2$. ☐ Khác.

c. Xác định m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 3

☐ $m = 0 \vee m = 20$ ☐ $m = 0 \vee m = -20$ ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0.$$

a. Xác định m để phương trình có một nghiệm.

☐ $m = 3$. ☐ $m = -3$. ☐ Khác.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

c. Xác định m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

☐ $m = -3$ ☐ $m = 4$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0.$$

a. Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ Khác.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

☐ $-1/2 < m < 1$. ☐ $-2 < m < 1$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$x^2 - (m - 2)x + m(m - 3) = 0.$$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

☐ $m = 2$. ☐ $m = \frac{13 \pm \sqrt{105}}{8}$. ☐ Khác.

b. CMR nếu phương trình trên có một nghiệm dương là x_1 thì phương trình: $m(m - 3)x^2 - (m - 2)x + 1 = 0$ cũng có một nghiệm dương là $\frac{1}{x_1}$

Bài tập 9: Hãy xét dấu các nghiệm của phương trình:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$$

Bài tập 10: Cho hai phương trình

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 + mx + n = 0.$$

Giả sử α là một nghiệm của phương trình thứ nhất, β là một nghiệm của phương trình thứ hai. CMR $\alpha = k\beta$ khi và chỉ khi:

$$(q - k^2n)^2 + k(p - km)(knp - qm) = 0.$$

IX. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{2}\ .$$

khi đó phương trình sẽ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m+3 \end{cases}$$

a. Khi đó phương trình có nghiệm $-2x_1$ và $-2x_2$ ta được:

$$\begin{cases} (-2x_1) + (-2x_2) = -2(x_1 + x_2) = 4(m+1) \\ (-2x_1).(-2x_2) = 4x_1x_2 = 4(2m+3) \end{cases}$$

Do đó $-2x_1$ và $-2x_2$ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 4(m+1)x + 4(2m+3) = 0.$$

b. Khi đó phương trình có nghiệm $3x_1$ và $3x_2$ ta được:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = -6(m+1) \\ 3x_1.3x_2 = 9x_1x_2 = 9(2m+3) \end{cases}$$

Do đó $3x_1$ và $3x_2$ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 6(m+1)x + 9(2m+3) = 0.$$

c. Khi đó phương trình có nghiệm $-x_1^2$ và $-x_2^2$ ta được:

$$\begin{cases} (-x_1^2) + (-x_2^2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = -2(2m^2 + 2m - 1) \\ (-x_1^2).(-x_2^2) = x_1^2x_2^2 = (2m+3)^2 \end{cases}$$

Do đó $-x_1^2$ và $-x_2^2$ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 2(m^2 + 2m - 1)x + (2m+3)^2 = 0.$$

d. Khi đó phương trình có nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$ ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{2(2m^2 + 2m - 1)}{(2m+3)^2} \\ \dfrac{1}{x_1^2}.\dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{1}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{1}{(2m+3)^2} \end{cases}$$

Do đó $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$ là nghiệm của phương trình :

$$(2m+3)^2x^2 - 2(m^2 + 2m - 1)x + 1 = 0.$$

e. Khi đó phương trình có nghiệm x_1+x_2 và $x_1.x_2$ ta được:

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+x_1.x_2=1\\(x_1+x_2).x_1.x_2=-2(m+1)(2m+3)\end{cases}$$

Do đó x_1+x_2 và $x_1.x_2$ là nghiệm của phương trình :

$$x^2-x-2(m+1)(2m+3)=0.$$

Bài tập 2:

a. $E=\sqrt{4-2m}$ và $F=\sqrt{\sqrt{2m-4}+2\sqrt{2}}$.

b. $1\le|m|\le\sqrt{3}$.

c. $0\le|m|\le 2$.

Bài tập 3: b. $m=1$.

Bài tập 4:

b. $m<-2$ hoặc $2<m<\frac{5}{2}$.

c. $m=0\vee m=-20$

Bài tập 6:

a. $m=3$.

c. $m=4$.

Bài tập 7:

a. Không tồn tại m.

b. $-1/2<m<1$.

Bài tập 8: $m=2$ hoặc $m=\frac{13\pm\sqrt{105}}{8}$.

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

CHỦ ĐỀ 1

HỆ GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1) \\ Ax + By + C = 0 \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được phát biểu dưới dạng:

" Cho hệ phương trình (I).

a. Giải hệ với một giá trị cụ thể của tham số.

b. Có thể là các câu hỏi:

- Giải và biện luận hệ theo tham số.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có 2 nghiệm phân biệt.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm thoả mãn K.

Khi đó tốt nhất ta thực hiện theo 3 bước sau:

Bước 1: Từ phương trình (2) rút x hoặc y rồi thế vào phương trình (1). Khi đó ta được phương trình bậc hai theo x hoặc y, giả sử:

$f(x, m) = 0.$ (3)

Bước 2: Giải câu a) bằng cách thay giá trị cụ thể của tham số vào (3), từ đó có được x rồi suy ra nghiệm y.

Bước 3: Giải câu b). Nếu câu hỏi là:

- *Giải và biện luận hệ theo tham số* bài toán được chuyển về giải và biện luận (3).
- *Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm* ta sẽ đi tìm điều kiện để (3) có nghiệm.
- *Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất* ta sẽ đi tìm điều kiện để (3) có nghiệm duy nhất.
- *Tìm điều kiện của tham số để hệ có 2 nghiệm phân biệt* ta sẽ đi tìm điều kiện để (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- *Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm thoả mãn K* ta chuyển điều kiện K thành K_1 cho phương trình (3) để thực hiện.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Ta có :

$$(I) \Rightarrow 25x^2 - 80x + 64 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$$

Vậy hệ có nghiệm $x = \frac{8}{5}$ và $y = \frac{9}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 & (1) \\ x + 2y = m & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với m = 4.

b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Giải.

Từ phương trình (2), ta được:

$$2y = m - x. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$x^2 + (m - x)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 8 = 0. \quad (4)$$

a. Với m = 4

$$(4) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay x = 2 vào (3) (với m = 4), ta được: y = 1.

Vậy, với m = 4 hệ phương trình có một cặp nghiệm là x = 2 và y = 1.

b. Xét phương trình (4), ta có:

$$\Delta' = 16 - m^2.$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 16 - m^2 < 0 \Leftrightarrow |m| > 4$.

  Phương trình (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

  - Với m = 4,

    (4) có nghiệm kép $x_0 = 2$, thay vào (3), được: $y_0 = 1$.

    Vậy hệ phương trình có nghiệm là x = 2 và y = 1.

  - Với m = −4,

    (4) có nghiệm kép $x_0 = -2$, thay vào (3), ta được: $y_0 = -1$.

  Vậy hệ phương trình có nghiệm là x = −2 và y = −1.

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |m| < 4$.

Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{16 - m^2}}{2}$.

- Với $x_1 = \frac{m + \sqrt{16 - m^2}}{2}$, thay vào (3), ta được: $y_1 = \frac{m - \sqrt{16 - m^2}}{4}$.
- Với $x_2 = \frac{m - \sqrt{16 - m^2}}{2}$, thay vào (3), ta được: $y_2 = \frac{m + \sqrt{16 - m^2}}{4}$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm là (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

Kết luận:

- Với $|m| > 4$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 4$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2, 1)$.
- Với $m = -4$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(-2, -1)$.
- Với $|m| < 4$, hệ phương trình có hai cặp nghiệm là (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

Ví dụ 3: (ĐHTM – 2000). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 & (1) \\ x + ay - a = 0 & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ khi $a = 1$.

b. Tìm a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c. Gọi (x_1, y_1), (x_2, y_2) là các nghiệm của hệ đã cho. CMR:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1.$$

Giải.

Từ phương trình (2), ta được: $x = a - ay$. (3)

Thay (3) vào (1), ta được:

$$(a - ay)^2 + y^2 - (a - ay) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)y^2 - a(2a - 1)y + a^2 - a = 0. \quad (4)$$

a. Với $a = 1$, ta được:

$$(4) \Leftrightarrow 2y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 1 \ \& \ y_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \ \& \ y_2 = \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, với $a = 1$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm là $(1, 0)$ và $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b. Tìm a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 1 \ne 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}.$$

c. Khi đó, phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{a(2a-1)}{a^2+1} \\ y_1 y_2 = \dfrac{a^2-a}{a^2+1} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_1 = a - ay_1 \\ x_2 = a - ay_2 \end{cases}.$$

Suy ra:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (ay_1 - ay_2)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$= (a^2+1)[(y_2+y_1)^2 - 4y_1y_2]$$

$$= \frac{4a-3a^2}{a^2+1} = 1 - \frac{(2a-1)^2}{a^2+1} \le 1.$$

Ví dụ 4: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + mx + my - m - 1 = 0 \quad (1) \\ x + y = 4 \qquad\qquad\qquad\qquad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

có hai cặp nghiệm phân biệt (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thoả mãn:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4.$$

Giải.

Ta có :

$$(I) \Rightarrow x^2 + (4-x)^2 + mx + m(4-x) - 1 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 15 + 3m = 0. \qquad (3)$$

Trước hết cần tìn điều kiện để (3) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -14 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{3}. \qquad (*)$$

Khi đó (3) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = \dfrac{3m+15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 - x_1 \\ y_2 = 4 - x_2 \end{cases}$$

Khi đó :

$$4 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(-6m - 14)$$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{8}{3}$ thoả mãn (*).

Vậy với $m = -\dfrac{8}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x - y = m \end{cases}.$$

☐ $m = \sqrt{7}$. ☐ $m = -\sqrt{7}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: (ĐH Huế – 1997): Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = a \end{cases}.$$

☐ $a = \pm\sqrt{2}$. ☐ $a = \pm 2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ 2x - y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 0.

b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = m \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 13.

b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 3.

b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 2 \\ x + y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 2.

b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = m(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

Bài tập 8: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$.

c. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x - y = b \end{cases}$, với $a \geq 0$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Ta viết

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 & (1) \\ x - y = m & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Ta có :

$$(I) \Rightarrow 9x^2 - 16(x - m)^2 = 144 \Leftrightarrow 7x^2 - 32mx + 16m^2 + 144 = 0. \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$.

Vậy với $m = \pm\sqrt{7}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2: Ta viết

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ x - y = a & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Ta có :

$$(I) \Rightarrow x^2 + (x - a)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0. \quad (3)$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, với $a = \pm\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

CHỦ ĐỀ 2
HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

)ịnh nghĩa: Hệ phương trình đối xứng loại I đối với ẩn x và y là hệ gồm các hương trình không thay đổi khi ta thay x bởi y và y bởi x.

Bài toán : Giải hệ phương trình đối xứng loại I

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đối với hệ này ta thường dùng phép thay ẩn:

$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Sau khi tìm được S và P thì x, y là nghiệm của phương trình

$t^2 - St + P = 0$.

Chú ý: Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại I được trình bày ở trên rong nhiều trường hợp ta còn sử dụng các phương pháp:

1. *Phương pháp thế*: bởi rất nhiều hệ đối xứng loại I là "*Hệ gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất của hai ẩn*".
2. *Phương pháp điều kiện cần và đủ*: được áp dụng rất tốt cho hệ với yêu cầu "*Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất*". Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần

- Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi: $x_0 = y$ (*)
- Thay (*) vào hệ ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm.

Giải.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ xy = 7 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 2 \\ xy = 7 - m \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình: } t^2 - 2t + 1 - m = 0. \quad (1)$$

hoặc

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình: } t^2 + 2t + 1 - m = 0. \quad (2)$$

Nhận xét rằng số nghiệm của hệ là số nghiệm khác nhau của (1), (2).

a. Với m = 1, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \ \& \ y = 2 \\ x = 2 \ \& \ y = 0 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \ \& \ y = -2 \\ x = -2 \ \& \ y = 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy, với m = 1 hệ có bốn cặp nghiệm (0, 2); (2, 0); (0, −2); (−2, 0).

b. Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm.

Nhận xét rằng $\Delta'_{(1)} = \Delta'_{(2)} = m - 6$.

Do vậy hệ có đúng hai nghiệm ⇔ phương trình (1), (2) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = \Delta'_{(2)} = 0 \Leftrightarrow m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}. \quad (I)$$

a. Giải hệ phương trình với m = 26.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có một nghiệm duy nhất.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = m \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \dfrac{36 - m}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình } t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0. \quad (II)$$

Nhận xét rằng số nghiệm của hệ đã cho là số nghiệm của phương trình (1).

a. Với m = 26, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \ \& \ y = 5 \\ x = 5 \ \& \ y = 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy, với m = 26 hệ phương trình có hai cặp nghiệm là (1, 5) và (5, 1).

b. Hệ vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m > 18.$

Vậy, với $m > 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có một nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$

Khi đó hệ có nghiệm là $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0 \Leftrightarrow m - 18 > 0 \Leftrightarrow m < 18.$

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

hận xét: Với yêu cầu ở câu c) ta có thể giải bằng *phương pháp điều kiện cần và ủ* như sau:

iều kiện cần

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do ó hệ có nghiệm duy nhất khi: $x_0 = y_0$. (*)

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 = m \\ 2x_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow m = 18.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

iều kiện đủ

Với $m = 18$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

í dụ 3: (ĐHQG Khối B – 1997). Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \\ x + y = 8 \end{cases}.$$

Giải.

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = a \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy} = a \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64=(a+2)xy \\ x+y=8 \end{cases}$$

a. Với $a = -2$, hệ vô nghiệm.

b. Với $a \neq -2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=\dfrac{64}{a+2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 8t + \frac{64}{a+2} = 0. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng số nghiệm của hệ đã cho là số nghiệm của phương trình ( ).

Xét phương trình (1), ta có:

$$\Delta' = 16 - \frac{64}{a+2} = \frac{16(a-2)}{a+2}.$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{16(a-2)}{a+2} < 0 \Leftrightarrow |a| < 2.$

  Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 2.$

  Khi đó, (1) có nghiệm kép $x_0 = 4$, hệ phương trình có nghiệm là $x = y = 4$.

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |a| > 2.$

  Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $t_{1,2} = 4 \pm 4\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}$.

  Suy ra, hệ có hai cặp nghiệm:

$$\begin{bmatrix} x_1 = t_1 \text{ và } y_1 = t_2 \\ x_2 = t_2 \text{ và } y_2 = t_1 \end{bmatrix}$$

Kết luận:

- Với $-2 \leq a < 2$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất (4, 4).
- Với $|a| > 2$, hệ phương trình có hai cặp nghiệm là (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

Chú ý. Một số hệ phương trình cần sử dụng một vài phép biến đổi đơn giản để đưa về dạng đối xứng loại I. Thông thường ta sử dụng phép đổi biến.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x-y-xy=3 \end{cases}$$

Giải.

Nhận xét: hệ trên vốn không đối xứng.

Đặt $t = -y$, ta được hệ đối xứng:

$$\begin{cases} x^2 - tx + t^2 = 1 \\ x + t + xt = 3 \end{cases}.$$

Đặt

$$\begin{cases} x + t = S \\ xt = P \end{cases}$$ điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$, ta được:

$$\begin{cases} S^2 - 3P = 1 \\ S + P = 3 \end{cases} \Rightarrow S^2 + 3S - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S = -5 \\ S = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} S = -5 \ \& \ P = 8 \ (l) \\ S = 2 \ \& \ P = 1 \end{bmatrix}.$$

- Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 2 \\ xt = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x, t là nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$

$\Rightarrow x = t = 1 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -1$.

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1, -1)$.

Ví dụ 5: (ĐHCSND Khối A – 2000). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases} \quad (I)$$

a. Giải hệ phương trình với $m = -3$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải.

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} (x + y) + xy = m + 2 \\ (x + y).xy = m + 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x+y và xy là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (m + 2)t + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = m + 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } f(u) = u^2 - u + m + 1 = 0. \quad (1) \\ \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } g(u) = u^2 - (m + 1)u + 1 = 0. \quad (2) \end{cases}$$

a. Với $m = -3$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u = -1 \\ u = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \ \& \ y = 2 \\ x = 2 \ \& \ y = -1 \end{bmatrix}.$$

$(2) \Leftrightarrow u^2 + 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Leftrightarrow x = y = -1$.

Vậy, với $m = 3$ hệ 3 cặp nghiệm là $(-1, 2)$, $(2, -1)$ và $(-1, -1)$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1:

Hệ có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm và } (2) \text{ có nghiệm kép} \\ (2) \text{ vô nghiệm và } (1) \text{ có nghiệm kép} \\ (1) \text{ và } (2) \text{ có nghiệm kép } u_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g < 0 \\ \Delta_f = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g = \Delta_f = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4m - 3 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -4m - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = -4m - 3 = 0 \\ m = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Cách 2:

Điều kiện cần

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi: $x_0 = y_0$. (*)

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 = m + 2 \\ 2x_0^3 = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2x_0^3 - 1 \\ 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = -3/4 \end{cases}.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

- Với $m = 1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x + y) = 3 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y \text{ và } xy \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} (vn) \\ \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

- Với $m = -1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x + y) = 1 \\ xy(x + y) = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ luôn có hai cặp nghiệm $(0, 1)$ và $(1, 0)$.

- Với $m = -\frac{3}{4}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x+y) = \frac{5}{4} \\ xy(x+y) = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x + y \text{ và } xy \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x+y=1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = \frac{1}{4} \\ xy = 1 \end{cases} (vn) \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 58 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 28 \\ xy = 4 \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Bài tập 3: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 164 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2 + x + y + y^2 = 8 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$.

Bài tập 4: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 - y^2 + 3(x+y) = 28 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$.

Bài tập 5: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 2(x+y) = -31 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$.

Bài tập 6: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} xy = 90 \\ x - y = 9 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2 + x - y + y^2 = 4 \\ x(x - y + 1) + y(y - 1) = 2 \end{cases}$.

Bài tập 7: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - x + y = 6 \\ xy - x + y = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy = \frac{7}{2} \\ 2(x + y) = 3xy \end{cases}$.

Bài tập 8: (ĐHQG Khối D – 1999). Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + y - xy = 1 - m \\ 5(x + y) - 4xy = 4 \end{cases}$$

Bài tập 9: (ĐHQG Khối A – 1999). Chứng tỏ rằng với $\forall m$, hệ sau luôn cónghiệr

$$\begin{cases} x + y + xy = 2m + 1 \\ xy(x + y) = m^2 + m \end{cases}$$

Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 10: Tìm liên hệ giữa a, b để các hệ có nghiệm.

a $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$.

b $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

Bài tập 11: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 - 2 \\ x + y = 2a - 3 \end{cases}.$$

Gọi (x, y) là nghiệm của hệ. Xác định a để tích xy nhỏ nhất.

Bài tập 12: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 3m - 5 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 5/2.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có một nghiệm duy nhất.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

CHỦ ĐỀ 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình đối xứng loại II đối với ẩn x và y là hệ nếu tráo đổi vai trò của x, y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia của hệ.

Bai toán : Giải hệ phương trình đối xứng loại II

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đối với hệ này khi trừ từng vế của hai phương trình bao giờ cũng thu được phương trình tích.

$$(x-y)f(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y \\ f(x,y)=0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó ta giải hệ cho từng trường hợp.

Chú ý: Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại II được trình bày ở trên, trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng các phương pháp:

1. *Phương pháp đồ thị.*
2. *Phương pháp điều kiện cần và đủ*: được áp dụng rất tốt cho hệ với yêu cầu *"Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất"*. Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần

- Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi: $x_0 = y_0$. (*)
- Thay (*) vào một phương trình của hệ và tìm điều kiện của tham số để phương trình đó có nghiệm duy nhất, khi đó ta được giá trị của tham số .
- Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (ĐHQG Khối B – 2000). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2-3x=y^2-2 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases}.$$

Giải.

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$2(x^2-y^2)-3(x-y)=-(x^2-y^2) \Leftrightarrow 3(x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y \\ y=1-x \end{bmatrix}.$$

- Với x = y, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x=y \\ 2x^2-3x=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y=1 \\ x=y=2 \end{bmatrix}.$$

- Với $y = 1 - x$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 - 3x = (1-x)^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$ vô nghiệm.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm là (1, 1) và (2, 2).

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \quad (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 0$.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$x - y = -(x^2 - y^2) + (x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = y \\ x = -y \end{bmatrix}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \quad (1) \end{cases} \text{(I) hoặc} \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \qquad (2) \end{cases} \text{(II)}$$

a. Với $m = 0$, ta được

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có hai cặp nghiệm là (0, 0) và (2, 2).

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} (1) \text{ có nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $m \leq 1$.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện cần

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do có hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Với m = 1, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \xrightarrow{+} x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Nghiệm thoả mãn hệ và là nghiệm duy nhất.

Vậy, với m = 1 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3: (ĐHHH – 1997). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = −1.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải.

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$x^2 - y^2 = -m(x - y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -m - x \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - mx + m = 0 \quad (1) \end{cases} \quad (I) \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} y = -m - x \\ m^2 + m = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (II)$$

a. Với m = −1. ta được

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -1 \\ x = y = \dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ vô số nghiệm.}$$

Vậy, với m = −1 hệ có các nghiệm là

$$(-1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ và } \begin{cases} y = 1 - x \\ x \text{ tuỳ ý} \end{cases}.$$

b. Sử dụng phương pháp cần và đủ

Điều kiện cần

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0. \qquad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8 \end{array}\right.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

- Với m = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $y = -x \Rightarrow$ loại.

- Với m = 8, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ xy + y^2 = 8(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -8 - x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -8 - x \\ 72 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ x = y = 2 là nghiệm duy nhất.

Vậy, với m = 8 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = mx + y \\ y^2 + 2xy = my + x \end{cases}.$$

Giải.

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$x^2 - y^2 = (m-1)(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y-m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = m - 1 - x \end{array}\right.$$

a. Với x = y. Thế vào phương trình đầu:

$$3x^2 = (m+1)x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{m+1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = \dfrac{m+1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, với mọi m hệ luôn có hai nghiệm là (0, 0) và $\left(\dfrac{m+1}{3}, \dfrac{m+1}{3}\right)$.

b. Với y = m − 1 − x. Thế vào phương trình đầu:

$$x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0. \qquad (*)$$

Ta có:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-1) = (m-1)(m-5).$$

- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình không có thêm nghiệm, ngoài các nghiệm đã nêu.

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 5$.

- Với $m = 1$, phương trình (*) có nghiệm kép $x_0 = 0$, khi đó ta được: $y_0 = 0$.

  Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm là $(0, 0)$ và $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

- Với $m = 5$, phương trình (4) có nghiệm kép $x_0 = 2$, khi đó ta được: $y_0 = 2$.

  Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm là $(0, 0)$ và $(2,2)$.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > 5 \\ m < 1 \end{bmatrix}$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}.$$

- Với $x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}$, ta được:

$$y_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}.$$

- Với $x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}$, ta được:

$$y_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}.$$

Vậy, hệ có bốn cặp nghiệm là

$$(0, 0); (\frac{m+1}{3}, \frac{m+1}{3}); (x_1, y_1) \text{ và } (x_2, y_2).$$

Kết luận:

- Với $1 < m < 5$, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(0, 0); (\frac{m+1}{3}, \frac{m+1}{3})$.
- Với $m = 1$, hệ phương trình có hai cặp nghiệm: $(0, 0)$ và $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
- Với $m = 5$, hệ phương trình có hai cặp nghiệm: $(0, 0)$ và $(2,2)$..
- Với $m > 5 \vee m < 1$, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm:

$$(0, 0); (\frac{m+1}{3}, \frac{m+1}{3}); (x_1, y_1); (x_2, y_2).$$

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐHQG Khối A – 1997). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases}.$$

☐ $(-1, 1)$. ☐ $(-2, -2)$. ☐ **Khác.**

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$.

Bài tập 3: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{2x}{1-x^2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \\ y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$.

Bài tập 4: (ĐHD – 1997). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ y^2 + a = x^2 \end{cases}.$$

Xác định các giá trị âm của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = m \\ x^2 + (y-2)^2 = m \end{cases}.$$

☐ m = 2. ☐ m = –2. ☐ Khác

Bài tập 6: (ĐH Huế Khối A – 1997). Cho a ≠ 0. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + y - \dfrac{a^3}{x^2} = 0 \\ 7y + x - \dfrac{a^3}{y^2} = 0 \end{cases}.$$

CMR hệ có nghiệm duy nhất khi a > 0. Điều đó còn đúng hay không khi a < 0.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(3-4y^2) = m(3-4m^2) \\ y(3-4y^2) = m(3-4m^2) \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

Điều kiện: x, y ≠ 0.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \end{cases}$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$(x^2 - y^2) = -4(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -4 - x \end{cases}.$$

- Với $x = y$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 3x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2 \text{ (do điều kiện } x, y \neq 0).$$

- Với $y = -4 - x$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 - 3x(-4 - x) = 4(-4 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2.$$

Vậy, hệ có một cặp nghiệm là $(-2, -2)$.

Bài tập 5: Ta viết:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = m & (1) \\ x^2 + (y - 2)^2 = m & (2) \end{cases}$$

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0), suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$(x_0 - 2)^2 + x_0^2 = m \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 + 4 - m = 0 \qquad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

Với $m = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(II)}$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Nhận xét rằng $x = y = 1$ thoả mãn hệ (II).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

Bài tập 6: Điều kiện: $x, y \neq 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 7x^3 + x^2y - a^3 = 0 \\ 7y^3 + xy^2 - a^3 = 0 \end{cases}.$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$7(x^3 - y^3) + xy(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[7(x^2 + xy + y^2) + xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = y \\ 4(x + y)^2 + 3(x^2 + y^2) = 0 \ (vn) \end{bmatrix}$$

- Với $x = y$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ 8x^3 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{a}{2},$$

ta phải có $a \neq 0$ (do điều kiện $x, y \neq 0$).

Vậy, hệ nghiệm duy nhất là $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ với mọi $a \neq 0$.

CHỦ ĐỀ 4
HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \quad (1) \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \quad (2) \end{cases} \qquad \textbf{(I)}$$

Bài toán : Giải hệ phương trình đẳng cấp bậc hai

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khử số hạng tự do để dẫn tới phương trình:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0. \qquad (3)$$

Bước 2: Đặt x = ty, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow y^2[At^2 + Bt + C] = 0.$$

- Xét y = 0 thay vào hệ.
- Xét $At^2 + Bt + C = 0$, nếu có nghiệm t_0 thì thế $x = t_0y$ vào hệ để xét hệ với một ẩn y.

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ hệ khử số hạng x^2 (hoặc y^2) để dẫn tới phương trình khuyết x^2 (hoặc y^2), giả sử:

$$Dx^2 + Exy + F = 0 \Rightarrow y = -\frac{Dx^2 + F}{Ex}. \qquad (4)$$

Bước 2: Th 4) vào một phương trình của hệ ta được phương trình trùng phương ẩn x.

I. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 \quad (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Giải.

Cách 1.

Khử số hạng tự do từ hệ ta được:

$$x^2 + 9xy - 22y^2 = 0. \qquad (3)$$

Đặt x = ty, khi đó :

$$(3) \Leftrightarrow y^2(t^2 + 9t - 22) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ t^2 + 9t - 22 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ t = 2 \\ t = -11 \end{bmatrix}.$$

- Với y = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 = 15 \\ x^2 = 8 \end{cases}$$ vô nghiệm..

- Với t = 2 ta được x = 2y,

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 2 \ \& \ y_1 = 1 \\ x_2 = -2 \ \& \ y_2 = -1 \end{bmatrix}.$$

- Với t = −11 ta được x = −11y,

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_3 = 1/\sqrt{14} \\ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 = -11/\sqrt{14} \ \& \ y_3 = 1/\sqrt{14} \\ x_4 = 11/\sqrt{14} \ \& \ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm.

Cách 2.

Nhận xét rằng: nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$.

Khử số hạng x^2 từ hệ ta được:

$$xy - 3y^2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3y^2 - 1}{y}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (2), ta được:

$$14y^4 - 15y^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

Đặt $t = y^2$, $t \geq 0$, ta được:

$$(5) \Leftrightarrow 14t^2 - 15t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 1/14 \end{bmatrix}.$$

- Với t = 1

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 2 \ \& \ y_1 = 1 \\ x_2 = -2 \ \& \ y_2 = -1 \end{bmatrix}.$$

- Với $t = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_3 = 1/\sqrt{14} \\ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 = -11/\sqrt{14} \ \& \ y_3 = 1/\sqrt{14} \\ x_4 = 11/\sqrt{14} \ \& \ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm.

Chú ý. Với bài toán giải biện luận ta thường lựa chọn cách 2.

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 17 & (1) \\ x^2 - xy + 4y^2 = m & (2) \end{cases}.$$

Giải.

Nhận xét rằng: nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$.

Khử số hạng x^2 từ hệ ta được:

$$xy = 17 - m \Leftrightarrow x = \frac{17 - m}{y}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$4y^4 - 17y^2 + (17 - m)^2 = 0.$$

Đặt $t = y^2$, $t \geq 0$, khi đó:

$$4t^2 - 17t + (17 - m)^2 = 0. \qquad (4)$$

Ta có:

$$\Delta = (4m - 51)(85 - 4m).$$

a. Nếu $\Delta < 0$

$$\Leftrightarrow (4m - 51)(85 - 4m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{85}{4} \\ m < \dfrac{51}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{85}{4} \\ m = \dfrac{51}{4} \end{cases}.$$

- Với $m = \dfrac{85}{4}$,

  (4) có nghiệm kép $y = \dfrac{17}{8} \Rightarrow x = -2.$

  Vậy, hệ có nghiệm: $(-2, \dfrac{17}{8})$.

- Với $m = \dfrac{51}{4}$,

  (4) có nghiệm kép $y = \dfrac{17}{8} \Rightarrow x = 2.$

  Vậy, hệ có nghiệm: $(2, \dfrac{17}{8})$.

c. Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{51}{4} < m < \dfrac{85}{4}$

Khi đó phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(4m - 51)(85 - 4m)}}{8} > 0 \text{ vì } S, P > 0.$$

- Với $t_1 = \dfrac{17 - \sqrt{(4m - 51)(85 - 4m)}}{8}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{t_1} \ \& \ x_1 = \dfrac{17 - m}{y_1} \\ y_2 = -\sqrt{t_1} \ \& \ x_1 = \dfrac{17 - m}{y_2} \end{cases}.$$

- Với $t_2 = \dfrac{17 + \sqrt{(4m - 51)(85 - 4m)}}{8}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = \sqrt{t_2} \ \& \ x_3 = \dfrac{17 - m}{y_3} \\ y_4 = -\sqrt{t_2} \ \& \ x_4 = \dfrac{17 - m}{y_4} \end{cases}$$

Vậy, hệ có bốn cặp nghiệm phân biệt: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) và (x_4, y_4)

Kết luận:

- Với $m < \dfrac{51}{4}$ hoặc $m > \dfrac{85}{4}$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $m = \dfrac{85}{4}$, hệ có nghiệm: $(-2, \dfrac{17}{8})$.
- Với $m = \dfrac{51}{4}$, hệ có nghiệm: $(2, \dfrac{17}{8})$
- Với $\dfrac{51}{4} < m < \dfrac{85}{4}$, hệ có 4 cặp nghiệm: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4).

Ví dụ 3: (ĐHAN Khối A – 2000). Tìm a để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}.$$

Giải.

Đặt $m = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$.

Khi đó hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \ (*) \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = m \end{cases}.$$

Nhận xét rằng: nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $x \neq 0$ (nếu trái lại (*) mâu thuẫn)

Khử số hạng y^2 từ hệ ta được:

$$2xy = 40 + 3m - 11x^2 \Leftrightarrow y = \frac{40 + 3m - 11x^2}{x}. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (*), ta được:

$$105x^4 - 2(31m + 408)x^2 + (3m + 40)^2 = 0.$$

Đặt $t = y^2$, $t \geq 0$, ta được:

$$f(t) = 105t^2 - 2(31m + 408)t + (3m + 40)^2 = 0. \qquad (4)$$

Vậy, để hệ có nghiệm thì (4) phải có ít nhất một nghiệm không âm

$\Leftrightarrow$ (4) có 2 nghiệm không âm (vì $\dfrac{c}{a} \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -3 + \sqrt{105}.$$

Từ đó, ta được:

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \geq -3 + \sqrt{105} \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2a)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 - 2a \geq 3 \\ a^2 - 2a \leq -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \geq 3 \\ a \leq -1 \end{bmatrix}$$

Vậy với $a \geq 3$ hoặc $a \leq -1$ hệ có nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐHSP TPHCM Khối A, B – 2000) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

☐ $(-1, 2)$. ☐ $(1, -2)$. ☐ **Khác.**

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$$

☐ $(1, 4)$. ☐ $(-1, -4)$. ☐ **Khác.**

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ 2x^2 + 4xy - 2y^2 = m \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = 14$.

b. Giải và biện luận hệ phương trình.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m \\ y^2 - 2xy = 3 \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = 1$.

b. Giải và biện luận hệ phương trình.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Ta viết:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Khử số hạng tự do từ hệ ta được:

$$16x^2 + 14xy + 3y^2 = 0. \qquad (3)$$

Đặt $x = ty$

$$(3) \Leftrightarrow y^2(16t^2 + 14t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ t = -1/2 \\ t = -3/8 \end{bmatrix}.$$

- Với $y = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$ vô nghiệm..

- Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -1 \ \& \ y_1 = 2 \\ x_2 = 1 \ \& \ y_2 = -2 \end{bmatrix}.$$

- Với $t = -\frac{3}{8} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}y$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = \frac{64}{17} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_3 = \frac{8}{\sqrt{17}} \\ y_4 = -\frac{8}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 = -\frac{3}{\sqrt{17}} \ \& \ y_3 = \frac{8}{\sqrt{17}} \\ x_4 = \frac{3}{\sqrt{17}} \ \& \ y_4 = -\frac{8}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm.

Bài tập 2: Ta viết:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 & (1) \\ y^2 - 3xy = 4 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét rằng: nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$.

Từ phương trình (2), ta được:

$$x = \frac{y^2 - 4}{3y}. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$2y^4 - 31y^2 - 16 = 0. \qquad (4)$$

Đặt $t = y^2$, $t \geq 0$, ta được:

$$(4) \Leftrightarrow 2t^2 - 31t - 16 = 0 \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 4 \\ y = -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \ \& \ y = 4 \\ x = -1 \ \& \ y = -4 \end{bmatrix}$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm là $(1, 4)$ và $(-1, -4)$.

CHỦ ĐỀ 5
HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI KHÔNG MẪU MỰC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các hệ phương trình đại số tổng quát thường rất khó giải và không thể nêu ra ương pháp chung để giải chúng. Trong mục này, chúng ta xét một số hệ phương nh có thể giải bằng các phương pháp sơ cấp đơn giản như đặt ẩn phụ, sử dụng các ép biến đổi tương đương, những suy luận đặc biệt.

. VÍ DỤ MINH HOẠ

i dụ 1: (ĐHSP Hà nội II – 1999). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (x^2 - 3x) + (y^2 + 4y) = 1 \\ 3(x^2 - 3x) - 2(y^2 + 4y) = 3 \end{cases}$$

Đặt :

$$\begin{cases} u = x^2 - 3x \\ v = y^2 + 4y \end{cases},$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ 3u - 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 1 \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm: $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$.

i dụ 2: (ĐHL Khối A – 1999). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + x + y = b \\ y - x = b \end{cases}$$

Biết rằng hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của b. CMR a = 0.

Giải.

Giả sử trái lại $a \neq 0$.

Hệ có nghiệm với $\forall b$, nên phải có nghiệm khi $b = \dfrac{4}{a}$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + x + y = \dfrac{4}{a} \\ y - x = \dfrac{4}{a} \end{cases} \Rightarrow a[x^2 + (\frac{4}{a} + x)^2] + x + \frac{4}{a} + x = \frac{4}{a}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 10ax + 16 = 0, \quad (1)$$

ta có

$$\Delta' = -7a^2 < 0$$

Suy ra (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

Điều này trái giả thiết.

Vậy, với a = 0 hệ có nghiệm với mọi b.

Ví dụ 3: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = 2x + a^2(y-1) \\ y^2 = 2y + a^2x(x-2) \end{cases}.$$

Giải.

a. Nếu a = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 = 2x \\ y^2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\&\; y = 0 \\ x = 0 \;\&\; y = 2 \\ x = 2 \;\&\; y = 0 \\ x = 2 \;\&\; y = 2 \end{array}\right.$$

b. Nếu $a \neq 0$, chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} y - 1 = \dfrac{1}{a^2}(x^2 - 2x) \\ (y-1)^2 = a^2x(x-2) + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^4}(x^2 - 2x)^2 = a^2(x^2 - 2x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - a^6(x^2 - 2x) - a^4 = 0. \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 2x$, điều kiện $t \geq -1$, khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - a^6t - a^4 = 0, \qquad (2)$$

ta có:

$$\Delta = a^{12} + 4a^4 > 0, \forall a \neq 0.$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt::

$$t_{1,2} = \frac{a^6 \pm \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}, \text{ thoả mãn điều kiện } t \geq -1.$$

- Với $x^2 - 2x = t_1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = \frac{a^6 - \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{a^6 + 2 - \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{a^6 + 2 - \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}} \Rightarrow y_{1,2} = 1 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^6 - \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}.$$

- Với $x^2 - 2x = t_2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = \frac{a^6 + \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{a^6 + 2 + \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{\frac{a^6 + 2 + \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}} \Rightarrow y_{3,4} = 1 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^6 + \sqrt{a^{12} + 4a^4}}{2}.$$

Kết luận:

- Với a = 0, hệ có bốn cặp nghiệm: (0, 0); (0, 2); (2, 0) và (2, 2).
- Với $a \neq 0$, hệ có bốn cặp nghiệm: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) và $(x_4\ y_4)$.

CHƯƠNG III
TAM THỨC BẬC HAI

CHỦ ĐỀ 1
ĐỊNH LÍ THUẬN VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

KIẾN THỨC CƠ BẢN

ĐỊNH LÍ THUẬN VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Cho tam thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

có $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a, với $\forall x \in R$, tức là

$$af(x) > 0, \forall x \in R.$$

b. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a, với $\forall x \in R\backslash\{-\frac{b}{2a}\}$, tức là

$$af(x) \geq 0, \forall x \in R,$$

$af(x) = 0$ chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

c. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm, giả sử là $x_1 < x_2$. Lúc đó:

- $f(x)$ cùng dấu với a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.
- $f(x)$ trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$.

Trong trường hợp này ta có bảng tổng kết sau:

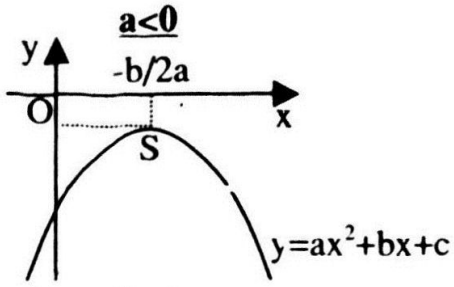
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		cùng dấu a	0	khác dấu a	0	cùng dấu a	

DÙNG ĐỒ THỊ ĐỂ XÉT DẤU TAM THỨC BẬC HAI

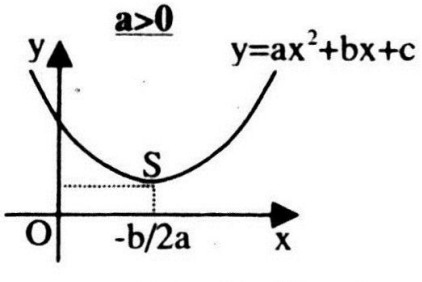
Ta có thể kiểm nghiệm lại định lí về dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) bằng cách dùng đồ thị của hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Đồ thị của hàm số này là một Parabol, dấu của $f(x)$ tuỳ theo vị trí của Parabol Ox.

a. Với $\Delta < 0$, Parabol không cắt Ox, ta có hai trường hợp:

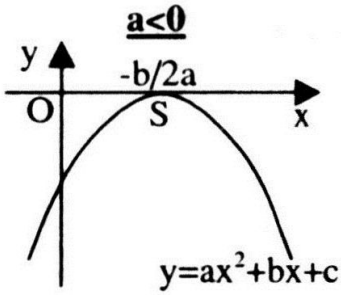


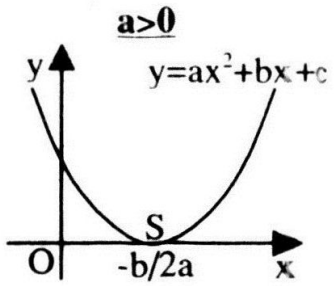
f(x)< 0 với mọi x



f(x) > 0 với mọi x

b. Với $\Delta = 0$, Parabol tiếp xúc với Ox, ta có hai trường hợp:

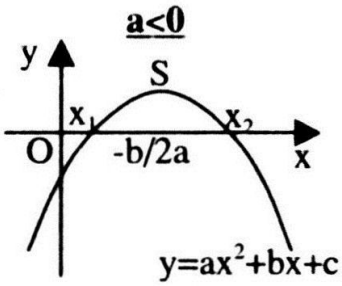


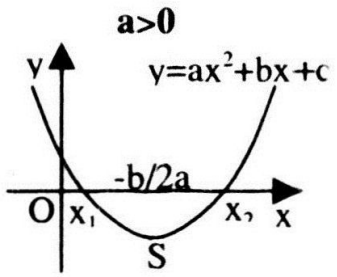


$f(x) \le 0$ với mọi x

$f(x) \ge 0$ với mọi x

c. Với $\Delta > 0$, Parabol cắt Ox tại 2 điểm phân biệt, ta có 2 trường hợp:





$f(x)>0$ với $x_1<x<x_2$
$f(x)<0$ với $x>x_2$ hoặc $x<x_1$

$f(x)<0$ với $x_1<x<x_2$
$f(x)>0$ với $x>x_2$ hoặc $x<x_1$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

Giải.

Với f(x) ta có:

$a = -1$,

$\Delta = 1$ nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

Ví dụ 2: Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = 12x^2 + 2(a + 3)x + a.$$

Giải.

Với f(x) ta có:

$a = 12$,

$\Delta' = (a - 3)^2$.

Xét hai trường hợp của Δ'.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a \neq 3$.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm là $x_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = -\frac{a}{6}$.

Xét hai khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a < 3$.

Khi đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1/2$		$-a/6$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Khả năng 2. Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a > 3$.

Khi đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-a/6$		$-1/2$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Ví dụ 3: Cho tam thức:

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3.$$

a. Với giá trị nào của m thì $f(x) < 0$ với mọi x.

b. Với giá trị nào của m thì $f(x) \geq 0$ với mọi x.

Giải.

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$,

ta có

$$f(x) = 4x - 6,$$

do đó không thể có $f(x) < 0$ với mọi x hoặc $f(x) \geq 0$ với mọi x.

- Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

a. $f(x) < 0$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 < 0 \\ 2(m - 1)(m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Vậy, với $m < -2$ thì $f(x) < 0$ với mọi x.

b. $f(x) \geq 0$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 2(m - 1)(m + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy, với $m \geq 1$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi x.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét dấu các biểu thức:

a. $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

b. $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Bài tập 2: Xét dấu các biểu thức:

a. $f(x) = (m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1$

b. $f(x) = mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3$.

Bài tập 3: Cho tam thức

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 2m.$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \geq 0\ \forall x$.

☐ $m \leq 0$. ☐ $m \geq 0$. ☐ Khác.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \leq 0\ \forall x$.

☐ $m \leq -2$. ☐ $m \geq -2$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3:

a. $m \geq 0$.

b. $m \leq -2$.

CHỦ ĐỀ 2
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1. Giải bất phương trình bậc hai:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái.

Bước 2: Chọn những giá trị của x thoả mãn dấu của bất phương trình.

Lưu ý: Khi đã nắm vững được kiến thức về định lý thuận và thành thạo trong việc xét dấu tam thức bậc hai chúng ta thường thực hiện tắt bài toán này.

Bài toán 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc hai:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu a = 0 (nếu có).

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính Δ rồi lập bảng xét dấu chung cho a và Δ.

Bước 2: Dựa vào bảng ta xét các trường hợp xảy ra.

Bước 3: Kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình:

a. $2x^2 + x + 3 > 0.$

b. $x^2 - 4x + 3 < 0.$

c. $2x^2 + 5x + 3 \geq 0.$

Giải.

a. Ta có

$$\Delta = 1 - 4.3.2 = -23 < 0.$$

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc R.

b. Tam thức ở vế trái có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

Dấu của bất phương trình trái dấu với hệ số a = 1, do đó tập nghiệm của bất phương trình là (1, 3).

c. Tam thức ở vế trái có hai nghiệm $x_1 = -\frac{3}{2}$ và $x_2 = -1$.

Dấu của bất phương trình cùng dấu với hệ số a = 2, do đó tập nghiệm của bất phương trình là $x \le -\frac{3}{2} \vee x \ge -1$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình:

$$(m + 1)x^2 - 2mx + 2m \le 0. \quad (1)$$

Giải.

Trường hợp 1. Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1.$$

Trường hợp 2. Với $m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$.

Ta có: $a = m + 1$; $\Delta' = m^2 - 2m(m + 1) = -m^2 - 2m$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

a. Với $m < -2$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in R \Rightarrow \text{nghiệm của (1) là } \forall x \in \mathbf{R}.$$

b. Với $m = -2$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \le 0, \forall x \in R \Rightarrow \text{nghiệm của (1) là } \forall x \in \mathbf{R}.$$

c. Với $-2 < m < -1$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{\Delta'}}{m + 1} \text{ và } x_2 = \frac{m + \sqrt{\Delta'}}{m + 1}.$$

Trường hợp này $a < 0$ nên $x_2 < x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$\|\|\|\|\|\|\|\|\|$	0	$-$	

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x \le x_2 \vee x \ge x_1$.

d. Với $-1 < m < 0$, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2$$

Trường hợp này $a > 0$ nên $x_2 > x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		$\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|$	0	$-$	0	$\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|$	

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x_1 \le x \le x_2$.

e. Với m = 0, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \forall x \neq 0 \\ f(x) = 0 \text{ khi } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm của (1) là } x = 0.$$

f. Với m > 0, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận:

- Với $m \leq -2$, nghiệm của (1) là $\forall x \in R$.
- Với $-2 < m < -1$, nghiệm của (1) là $x \leq x_2 \vee x \geq x_1$.
- Với $m = -1$, nghiệm của (1) là $x \leq 1$.
- Với $-1 < m < 0$, nghiệm của (1) là $x_1 \leq x \leq x_2$.
- Với $m = 0$, nghiệm của (1) là $x = 0$.
- Với $m > 0$, (1) vô nghiệm.

Chú ý: Đôi khi ta không cần lập bảng xét dấu của a và Δ, khi đó dựa trên việc đánh giá thông qua hệ số a.

Ví dụ 3: Giải và biện luận bất phương trình:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 > 0. \qquad (1)$$

Giải.

Trường hợp 1. Với m = 0

Phương trình có dạng: $4x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$.

Trường hợp 2. Với m > 0

Ta đi tính biệt thức $\Delta' = 4 - m$.

a. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x.

b. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{2}$.

c. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4 \Rightarrow 0 < m < 4$.

Bất phương trình (1) có nghiệm:

$$x > \frac{m - 2 + \sqrt{4-m}}{m} \text{ hoặc } x < \frac{m - 2 - \sqrt{4-m}}{m}.$$

Trường hợp 3. Với $m < 0 \Rightarrow \Delta > 0$.

Bất phương trình (1) có nghiệm:

$$\frac{m - 2 + \sqrt{4-m}}{m} < x < \frac{m - 2 - \sqrt{4-m}}{m}.$$

Kết luận:

- Với m = 0, bất phương trình có nghiệm $x > \frac{3}{4}$.
- Với m = 4, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{2}$.
- Với m > 4, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với 0 < m < 4, bất phương trình có nghiệm:

$$x > \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m} \text{ hoặc } x < \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m}.$$

- Với m < 0, bất phương trình có nghiệm:

$$\frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m} < x < \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}.$$

Ví dụ 4: (Đề 48): Giải và biện luận bất phương trình:

$$4x^2 - 2(m+\sqrt{1+m})x + m\sqrt{1+m} < 0 \qquad (1)$$

Giải.

Trường hợp 1. Nếu $1 + m < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Ta đi tính biệt thức

$$\Delta' = (m+\sqrt{1+m})^2 - 4m\sqrt{1+m} = (m-\sqrt{1+m})^2.$$

Xét hai khả năng:

a. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m - \sqrt{1+m} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+m} = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 1+m = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bất phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m - \sqrt{1+m} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+m} \neq m \Leftrightarrow m \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó f(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = \frac{\sqrt{1+m}}{2}$ và $x_2 = \frac{m}{2}$.

- Nếu $x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+m}}{2} < \frac{m}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+m} < m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 1+m < m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bất phương trình (1) có nghiệm: $x_1 < x < x_2$.

- Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow -1 \leq m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bất phương trình (1) có nghiệm: $x_2 < x < x_1$.

Kết luận:

- Với $m < -1$ hoặc $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình có nghiệm $\frac{\sqrt{1+m}}{2} < x < \frac{m}{2}$.
- Với $-1 \le m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình có nghiệm $\frac{m}{2} < x < \frac{\sqrt{1+m}}{2}$.

Nhận xét: Thông qua các ví dụ trên ta có thể nhận được phương pháp giải biện luận cho bất phương trình bậc hai dạng tổng quát, ví dụ:

$$ax^2 + bx + c > 0. \quad (1)$$

Trường hợp 1. Với $a = 0$.

Bất phương trình có dạng:

$$bx + c > 0 \Leftrightarrow bx > -c. \quad (2)$$

a. Nếu $b = 0$.

Bất phương trình (2) có dạng:

$$0 > -c \Leftrightarrow c > 0.$$

- Nếu $c > 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Nếu $c \le 0$, bất phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $b > 0$.

Bất phương trình (2) có nghiệm $x > -\frac{c}{b}$.

c. Nếu $b < 0$.

Bất phương trình có nghiệm $x < -\frac{c}{b}$.

Trường hợp 2. Với $a > 0$.

Ta có

$\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc nếu $b = 2b'$ thì tính $\Delta' = (b')^2 - ac$).

a. Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$).

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x.

b. Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$).

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \ne -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x \ne -\frac{b'}{a}$).

c. Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bất phương trình (1) có nghiệm:

$$x > x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ hoặc } x < x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Trường hợp 3. Với $a < 0$.

a. Nếu $\Delta \le 0$ (hoặc $\Delta' \le 0$).

Bất phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bất phương trình (1) có nghiệm:

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = x_2 < x < x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ví dụ 5: Cho bất phương trình:

$$x^2 + 4x + 3 + m \le 0.$$

Với giá trị nào của m thì.

a. Bất phương trình vô nghiệm.

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm.

c. Bất phương trình có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 2.

Giải.

a. Bất phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

c. Để bất phương trình có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2 thì tam thức ở vế trái của bất phương trình phải có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \frac{\sqrt{1-m}}{1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Ví dụ 6: Tìm m để bất phương trình:

$$(m+2)x^2 - 2mx - m + 2 < 0$$

có nghiệm.

Giải.

Trường hợp 1. Với $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Bất phương trình có dạng:

$$4x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Bất phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2. Với $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$

Bất phương trình đã cho cũng có nghiệm (vì lúc đó tam thức ở vế trái luôn âm hoặc chỉ dương trên một khoảng hữu hạn).

Trường hợp 3. Với $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó để bất phương trình đã cho có nghiệm thì tam thức ở vế trái phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}\ .$$

Kết hợp các kết quả, ta được $|m| > \sqrt{2}$ thì bất phương trình có nghiệm.

Chú ý:

1. Ta có thể giải bài toán bằng cách tìm điều kiện để bất phương trình vô nghiệm. Tức là tìm điều kiện để bất phương trình:

$$(m + 2)x^2 - 2mx - m + 2 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

2. Những giá trị m còn lại sẽ làm cho bất phương trình có nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $x^2 + 2x + 3 < 0$.

☐ R. ☐ $\varnothing$. ☐ Khác.

b. $2x^2 - 3x + 3 > 0$.

☐ R. ☐ $\varnothing$. ☐ Khác.

c. $3x^2 + 5x + 2 \geq 0$.

☐ $-1 \leq x \leq -2/3$. ☐ $x \leq -1 \vee x \geq -2/3$. ☐ Khác.

d. $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$.

☐ $1/2 \leq x \leq 2$. ☐ $x \leq 1/2 \vee x \geq 2$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $x^2 - mx - m - 1 > 0$.

b. $-x^2 - 4x + m \geq 0$.

Bài tập 3: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $(m^2 + 1)x^2 - 4mx - 3 < 0$.

b. $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$.

Bài tập 4: Với giá trị nào của m thì bất phương trình:

$$(m - 2)x^2 + 2(m + 2)x - 2 \leq 0,$$

nghiệm đúng với mọi x.

☐ $-6 \leq m \leq 2$. ☐ $-6 \leq m \leq 0$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Với giá trị nào của m thì bất phương trình:

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0,$$

nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m < -4/3$. ☐ $m > 1$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Với giá trị nào của m thì bất phương trình:

$$(m-2)x^2 - 2mx - m - 2 < 0$$

có nghiệm.

Bài tập 7: Cho bất phương trình

$$x^2 - 2x + 1 + m \le 0.$$

Với giá trị nào của m thì.

a. Bất phương trình vô nghiệm.

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm.

c. Bất phương trình có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 1.

☐ $m = 1/4$. ☐ $m = -1/4$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho bất phương trình

$$mx^2 - (m+1)x + 2 \ge 0.$$

Với giá trị nào của m thì.

a. Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm.

c. Bất phương trình có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 2.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\varnothing$.

b. $\mathbf{R}$.

c. $x \le -1 \vee x \ge -\frac{2}{3}$.

d. $\frac{1}{2} \le x \le 2$.

Bài tập 4: $-6 \le m \le 0$.

Bài tập 5: $m > 1$.

Bài tập 7: c. $m = -\frac{1}{4}$.

CHỦ ĐỀ 3
ĐỊNH LÝ ĐẢO VỀ DẤU TAM THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định lí: Cho tam thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Nếu có số α sao cho $af(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và $x_1 < \alpha < x_2$.

Từ định lí trên ta thấy rằng:

a. Nếu $af(\alpha) < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và $x_1 < \alpha < x_2$.

b. Nếu $af(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha$ là một nghiệm của tam thức.

c. Nếu $af(\alpha) > 0$, khi đó cần quan tâm tới biệt số Δ của tam thức.

- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm nên việc so sánh số α với các nghiệm của tam thức là vô nghĩa.
- Nếu $\Delta \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm và số α nằm ngoài khoảng hai nghiệm.
- Nếu $\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} > \alpha$ thì $\alpha < x_1 \leq x_2$.
- Nếu $\frac{S}{2} < \alpha$ thì $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

2. SO SÁNH CÁC NGHIỆM CỦA MỘT TAM THỨC BẬC HAI VỚI 1 SỐ α

a. Điều kiện để số α nằm trong khoảng hai nghiệm của tam thức.

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

b. Điều kiện để cả hai nghiệm của tam thức lớn hơn α.

$$\alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ S/2 > \alpha \end{cases}.$$

c. Điều kiện để cả hai nghiệm của tam thức nhỏ hơn α.

$$x_1 \leq x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}.$$

3. SO SÁNH CÁC NGHIỆM CỦA MỘT TAM THỨC BẬC HAI VỚI HAI SỐ α, β ($\alpha < \beta$)

a. **Điều kiện để cả hai nghiệm của tam thức nằm trong khoảng** (α, β).

$$\alpha < x_1 \le x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < S/2 < \beta \end{cases}.$$

b. **Điều kiện để trong khoảng** (α,β) tam thức có **đúng một nghiệm** (còn nghiệm kia nằm ngoài)

$$\begin{bmatrix} x_1 \le \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta \le x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(\alpha).f(\beta) \le 0$$

Trong trường hợp này ta cần thử lại dấu bằng.

c. **Điều kiện để khoảng** (α,β) nằm trong khoảng hai nghiệm của tam thức

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}.$$

d. **Điều kiện để khoảng** (α,β) nằm ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức

- $x_1 \le x_2 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}.$

- $\alpha < \beta < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\beta) > 0 \\ S/2 > \beta \end{cases}.$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam thức bậc hai:

$$f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$$

So sánh các nghiệm của phương trình với -1.

Giải.

Ta đi xác định các giá trị:

$\Delta' = (m+1)^2 - (m-2)(m-5) = 9m - 9$,

$af(-1) = (m-2)(4m-5)$,

$\frac{S}{2} + 1 = \frac{m+1}{m-2} + 1 = \frac{2m-1}{m-2}$.

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	af(−1)	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với -1
$-\infty$	−	+	+	
1/2			0	Phương trình vô nghiệm
	−	+	−	
1	0			Phương trình có nghiệm kép $x = -2 < -1$
	+	+	−	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 < x_2 < -1$
5/4		0		Phương trình có một nghiệm $x = -1/2 > -1$
	+	−	−	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < -1 < x_2$
2		0	‖	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $-1 = x_1 < x_2$
				Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $-1 < x_1 < x_2$
$+\infty$	+	+	+	

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 4m - 5 = 0.$$

Với giá trị nào của m:

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn 2.

c. Phương trình có hai nghiệm đều nhỏ hơn 1.

Giải.

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow af(0) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1).(m^2 + 4m - 5) < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < -5 \\ -1 < m < 1 \end{bmatrix}.$$

b. Phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn 2

$$\Leftrightarrow 2 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(2) > 0 \\ S/2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m^2+5m+6) \le 0 \\ (m+1)(m^2+4m+3) > 0 \\ \dfrac{m+3}{m+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < m \le 1.$$

c. Phương trình có hai nghiệm đều nhỏ hơn 1

$$\Leftrightarrow x_1 \le x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(1) > 0 \\ S/2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m^2+5m+6) \le 0 \\ (m+1)(m^2+3m-2) > 0 \\ \dfrac{-2}{m+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$(m + 1)x^2 - (8m + 1)x + 6m = 0. \quad (1)$$

Với giá trị nào của m:

a. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt và 1 nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

b. Nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng (0, 1).

Giải.

a. Phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0, 1)

Trường hợp 1. Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$,

khi đó phương trình có dạng:

$$7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7} \in (0, 1).$$

Vậy $m = -1$ thoả mãn.

Trường hợp 2. Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$,

khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt và 1 nghiệm thuộc khoảng (0, 1)

$$\Rightarrow f(0).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow -6m^2 \leq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Ta cần thử lại với $m = 0$:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}, \text{ không thoả mãn.}$$

Vậy, phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0, 1) khi $m \neq 0$.

b. Nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng (0, 1)

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 0 < x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} af(0) \leq 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m(m+1) \leq 0 \\ -m(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy, nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng (0, 1) khi $-1 < m < 0$.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0. \quad (1)$$

Xác định m để phương trình có 1 nghiệm thuộc khoảng (0, 2).

Giải.

Trường hợp 1. Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$,

khi đó phương trình có dạng:

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \notin (0, 2).$$

Vậy $m = 1$ không thoả mãn.

Trường hợp 2. Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$,

khi đó phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0, 2)

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$\begin{bmatrix} 0 < x_1 = x_2 < 2 & (2) \\ \begin{bmatrix} x_1 \leq 0 < x_2 < 2 \\ 0 < x_1 < 2 \leq x_2 \end{bmatrix} & (3) \end{bmatrix}$$

- Giải (2):

$$\begin{cases}\Delta' = 0 \\ -\dfrac{b'}{a} \in (0,2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - (m+5)(m-1) = 0 \\ \dfrac{m}{m-1} \in (0,2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5 - 4m = 0 \\ \dfrac{m}{m-1} \in (0,2)\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

- Giải (3):

$$\Rightarrow f(0).f(2) \le 0 \Leftrightarrow (m+5)(m+1) \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le -1.$$

Thử lại:

- Với $m = -5$:

$$(1) \Leftrightarrow -6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x = 0 \\ x = 5/3\end{bmatrix}, \text{ thoả mãn.}$$

- Với $m = -1$:

$$(1) \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x = -1 \\ x = 2\end{bmatrix}, \text{ không thoả mãn.}$$

Vậy, với $-5 \le m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

hú ý. Để tìm điều kiện tam thức có nghiệm thoả mãn điều kiện $t > \beta$ hoặc $t < \alpha$ $\alpha < \beta$) ta phải xét khá nhiều trường hợp. Trong những trường hợp như vậy, ta nên ử dụng phương pháp "*gián tiếp*".

í dụ 5: Cho phương trình:

$$x^2 + mx + 2m - 2 = 0. \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm thoả mãn $|x| \ge 2$.

Giải.

Phương trình (1) có nghiệm $|x| \ge 2$.

Xét bài toán ngược:

" Tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm ".

Phương trình đã cho vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}(1) \text{ vô nghiệm} \\ (1) \text{ có hai nghiệm thuộc } (-2,2)\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\Delta < 0 \\ \begin{cases}\Delta \ge 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(2) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2\end{cases}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}m^2 - 8m - 8 < 0 \\ \begin{cases}m^2 - 8m - 8 \ge 0 \\ 2 > 0 \\ 4m + 2 > 0 \\ -2 < -\dfrac{m}{2} < 2\end{cases}\end{bmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \le -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \ge 4 + 2\sqrt{2}$ phương trình đã cho có ngh

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: So sánh các nghiệm của phương trình

$$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+2=0$$

với 1.

Bài tập 2: Cho phương trình

$$(m+2)x^2-2(m+1)x+m^2+4m+3=0.$$

Với giá trị nào của m·

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

☐ $m<-3$. ☐ $-2<m<-1$. ☐ Khác.

b. Phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn 1.

☐ $m>-1$ ☐ $\varnothing$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho phương trình

$$(m-1)x^2-2(m+1)x-3(m-2)=0.$$

Với giá trị nào của m:

a. Phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1, 1)$.

☐ $m\ge\frac{3}{4}$. ☐ $m>\frac{3}{4}$. ☐ Khác.

b. Nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng $(-2, 1)$.

☐ $\frac{3}{4}<m<1$ ☐ $\frac{3}{4}\le m\le 1$ ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho phương trình

$$x^2-(m+2)x+5m+1=0.$$

Với giá trị nào của m:

a. Phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

☐ $m<0$. ☐ $m=16$. ☐ Khác.

b. Phương trình có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn 2.

☐ $m\le 0$. ☐ $-\frac{1}{3}\le m\le 0$. ☐ Khác.

c. Phương trình có ít nhất một nghiệm thoả mãn $|x|>4$.

☐ $m<-\frac{25}{9}$. ☐ $m>16$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. $m<-3$ hoặc $-2<m<-1$.

b. $\varnothing$.

ài tập 3:

a. Xét hai trường hợp:

- Với m = 1, ta được:

$$-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \in (-1, 1).$$

- Với m ≠ 1, điều kiện là:

$$\begin{cases} \text{nghiệm kép} \in (-1,1) & (1) \\ \begin{cases} x_1 \le -1 < x_2 < 1 \\ -1 < x_1 < 1 \le x_2 \end{cases}, \text{thử lại "="} & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta được:

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \in (-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 + 3(m-2)(m-1) = 0 \\ \dfrac{m+1}{m-1} \in (-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 7m + 7 = 0 \\ -1 < \dfrac{m+1}{m-1} < 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Giải (2), ta được:

$$f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow 7(-4m + 3) \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{4}.$$

Thử lại với $m = \frac{3}{4}$, ta được:

$x^2 + 14x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -15$, tức là không thoả mãn điều kiện.

Vậy với $m > \frac{3}{4}$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng (−2, 1) điều kiện là:

$x_1 \le -2 < x_2 < 1$, dấu bằng cần thử lại

$$\Rightarrow \begin{cases} af(-2) \le 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(5m+6) \le 0 \\ (m-1)(4m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{6}{5} \le m \le 1 \\ \dfrac{3}{4} < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m < 1.$$

Vậy với $\frac{3}{4} < m < 1$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 4:

a. Phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1 điều kiện là:

$$\begin{cases} \text{nghiệm kép lớn hơn 1} & (1). \\ x_1 \le 1 < x_2, \text{thử lại "="} & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta được:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m = 0 \\ \dfrac{m+2}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 16.$$

Giải (2), ta được:

$af(1) \le 0 \Leftrightarrow 4m \le 0 \Leftrightarrow m \le 0.$

Thử lại với $m = 0$, ta được:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, tức là không thoả mãn điều kiện.

Vậy với $m < 0$ hoặc $m = 16$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn 2 điều kiện là:

$$\begin{cases} x_1 \le x_2 < 2 & (1) \\ x_1 < 2 \le x_2, \text{thử lại "="} & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta được:

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m \ge 0 \\ 3m + 1 > 0 \\ \dfrac{m+2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \vee m \ge 16 \\ m > -\dfrac{1}{3} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \le 0.$$

Giải (2), ta được:

$af(2) \le 0 \Leftrightarrow 3m + 1 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{3}.$

Thử lại với $m = -\dfrac{1}{3}$, ta được:

$x^2 - \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\dfrac{1}{3}$, tức là thoả mãn điều kiện.

Vậy với $m \le 0$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Xét bài toán ngược "*Tìm m để phương trình vô nghiệm hoặc cả hai nghiệm đều thuộc [−4, 4]*"

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(4) \ge 0 \\ af(-4) \ge 0 \\ -4 \le \dfrac{S}{2} \le 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 16m \ge 0 \\ m + 9 \ge 0 \\ 9m + 25 \ge 0 \\ -4 \le \dfrac{m+2}{2} \le 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{25}{9} \le m \le 16.$$

Vậy với $m \in R \setminus [-\dfrac{25}{9}, 16]$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 4
DẤU TAM THỨC TRÊN MỘT MIỀN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ta lưu ý các trường hợp (được chia thành các bài toán nhỏ) sau:

Bài toán 1. Cho tam thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \geq 0 \ \forall x$.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \leq 0 \ \forall x$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

a. $f(x) \geq 0 \ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

b. $f(x) \leq 0 \ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Bài toán 2. Cho tam thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \geq 0 \ \forall x > \alpha$.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \leq 0 \ \forall x > \alpha$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

a $f(x) \geq 0 \ \forall x > \alpha$ (hay $x \in (\alpha, +\infty)$) khi một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \leq 0$, điều kiện là $a > 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, điều kiện là $a > 0$ và phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < x_2 \leq \alpha$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}.$$

Lưu ý. Đề nghị bạn đọc tìm điều kiện để: $f(x) \geq 0 \ \forall x < \alpha$

b $f(x) \le 0\ \forall x > \alpha$ (hay $x \in (\alpha, +\infty)$) khi một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \le 0$, điều kiện là $a < 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, điều kiện là $a > 0$ và phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < x_2 \le \alpha$

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ af(\alpha) \ge 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}.$$

Lưu ý. Đề nghị bạn đọc tìm điều kiện để: $f(x) \le 0\ \forall x < \alpha$

Bài toán 3. Cho tam thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \ne 0$$

a Tìm điều kiện để $f(x) \ge 0\ \forall x \in (\alpha, \beta)$.

b Tìm điều kiện để $f(x) \le 0\ \forall x \in (\alpha, \beta)$.

BÀI GIẢI

Ta có:

a. $f(x) \ge 0\ \forall x \in (\alpha, \beta)$ khi một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \le 0$, điều kiện là $a > 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, xét hai khả năng sau:

- Nếu $a > 0$ thì điều kiện là $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn:

$$\begin{bmatrix} \alpha < \beta \le x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \le \alpha < \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} af(\alpha) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} af(\beta) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} > \beta \end{cases} \end{bmatrix}.$$

- Nếu $a < 0$ thì điều kiện là $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn:

$$x_1 \le \alpha < \beta \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) \le 0 \\ af(\beta) \le 0 \end{cases}.$$

b. $f(x) \le 0\ \forall x \in (\alpha, \beta)$ khi một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \le 0$, điều kiện là $a < 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, xét hai khả năng sau:

Nếu $a < 0$ thì điều kiện là $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn:

$$\begin{bmatrix} x_1 < x_2 \le \alpha < \beta \\ \alpha < \beta \le x_1 < x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} af(\alpha) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} af(\beta) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} > \beta \end{cases} \end{bmatrix}.$$

Nếu $a > 0$ thì điều kiện là $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn:

$$x_1 \le \alpha < \beta \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) \le 0 \\ af(\beta) \le 0 \end{cases}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam thức

$$f(x) = mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3.$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \ge 0\ \forall x$.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \le 0\ \forall x$.

Giải.

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $m = 0$, khi đó

$f(x) = 4x - 3$, do đó không thể có $f(x) \ge 0\ \forall x$.

Trường hợp 2. Nếu $m \ne 0$.

Để $f(x) \ge 0\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 4.$$

Vậy, với $m \ge 4$ ta có $f(x) \ge 0\ \forall x$.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $m = 0$, khi đó

$f(x) = 4x - 3$, do đó không thể có $f(x) \le 0\ \forall x$.

Trường hợp 2. Nếu $m \neq 0$.

Để $f(x) \leq 0\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để $f(x) \geq 0\ \forall x$.

Ví dụ 2: Cho tam thức

$$f(x) = (m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11.$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \geq 0\ \forall x > 6$.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \leq 0\ \forall x < -4$.

Giải.

a. Xét hai khả năng:

- Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$,

khi đó

$$f(x) = 4x + 9 \geq 0,\ \forall x > 6.$$

Vậy, $m = 2$ thoả mãn.

- Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Ta có biệt số

$$\Delta' = -m^2 + 7m - 6.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \leq 0$, điều kiện là $a > 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ -m^2 + 7m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 6 \\ m \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 6.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, điều kiện là $a > 0$ và phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < x_2 \leq 6$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ af(6) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ -m^2 + 7m - 6 > 0 \\ (m-2)(10m - 35) \geq 0 \\ \dfrac{3m-4}{m-2} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ -m^2 + 7m - 6 > 0 \\ (m-2)(10m - 35) \geq 0 \\ \dfrac{3m-8}{m-2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq m < 6.$$

Vậy, với $m \geq \dfrac{7}{2}$ hoặc $m = 2$ ta có $f(x) \geq 0\ \forall x > 6$.

b. Xét hai khả năng:

- Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó

  $f(x) = 4x + 9 \le 0, \forall x < -4.$

  Vậy, $m = 2$ thoả mãn.

- Nếu $m - 2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 2.$

  Ta có biệt số

  $\Delta' = -m^2 + 7m - 6.$

  Xét hai trường hợp:

  Trường hợp 1. Nếu $\Delta \le 0$, điều kiện là $a < 0$.

  Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ -m^2 + 7m - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 1.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0$, điều kiện là $a < 0$ và phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $-4 \le x_1 < x_2$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ af(-4) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ -m^2 + 7m - 6 > 0 \\ (m-2)(40m - 75) \ge 0 \\ \dfrac{3m - 4}{m - 2} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ -m^2 + 7m - 6 > 0 \\ (m-2)(40m - 75) \ge 0 \\ \dfrac{7m - 12}{m - 2} > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2 < m < 6.$

Vậy, với $2 \le m < 6$ hoặc $m \le 1$ ta có $f(x) \le 0\ \forall x < -4$.

Ví dụ 3: Cho tam thức

$$f(x) = x^2 - 2mx + 3m - 2$$

Tìm điều kiện của m để tam thức $f(x) > 0\ \forall x \in (1, 2)$.

Giải.

Ta có biệt số $\Delta' = m^2 - 3m + 2$.

Trường hợp 1. Nếu $\Delta \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

Khi đó $f(x) > 0\ \forall x \ne m$.

Do đó $f(x) > 0\ \forall x \in (1, 2)$.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

Khi đó $f(x) > 0\ \forall x \in (1, 2)$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < 2 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 1 < 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2 - m > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases}\end{array}\right. \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $1 \le m \le 2$ thì $f(x) > 0\ \forall x \in (1, 2)$.

Ví dụ 4: (HVCNBCVT 98) Tìm m để bất phương trình

$$x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m \le 0 \text{ với } \forall x \in [0, 1]. \qquad (1)$$

Giải.

Đặt

$$f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 \le 0 < 1 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(0) \le 0 \\ af(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m \le 0 \\ m^2 - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$$

Vậy với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Bài toán trên có thể được giải bằng phép biến đổi tương đương sau :

$$x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m \le 0$$
$$\Leftrightarrow (x - m - 1)^2 \le 1$$
$$\Leftrightarrow (x - m - 2)(x - m) \le 0$$
$$\Leftrightarrow m \le x \le m + 2.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow m \le 0 < 1 \le m + 2 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$$

Ví dụ 5: Cho tam thức

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x + 3(2m - 1)$$

Tìm điều kiện của m để tam thức $f(x) < 0$ với $\forall x \in (-1, 1)$.

Giải.

Xét hai khả năng:

- Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$,
  Khi đó
  $$f(x) = 6x - 6 < 0,\ \forall x < 1.$$
  Vậy, $m = -1$ thoả mãn.
- Nếu $m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 1$.
  Ta có biệt số
  $$\Delta' = -2m^2 - 7m + 4.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' < 0$, điều kiện là $a < 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 < 0 \\ -2m^2 - 7m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{2} \\ m < -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 7m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \dfrac{1}{2}$.

Xét hai khả năng sau:

<u>Nếu $a < 0$</u> $\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Khi đó điều kiện là $f(x) = 0$ có 2 nghiệm thoả mãn:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 < -1 < 1 \\ -1 < 1 < x_1 < x_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} af(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11m - 4 < 0 \\ \dfrac{2m-1}{m+1} < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3m < 0 \\ \dfrac{2m-1}{m+1} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < \dfrac{4}{11} \\ -1 < m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \neq m < 0.$$

Vậy, ta được điều kiện là $m < -1$.

<u>Nếu $a > 0$</u> $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó điều kiện là $f(x) = 0$ có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 < -1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) < 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11m - 4 < 0 \\ 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy, ta được điều kiện là $-1 < m < 0$.

Kết luận: với $m < 0$ thì $f(x) < 0\ \forall x \in (-1, 1)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tam thức

$$f(x) = (m - 1)x^2 - (m - 2)x - 1.$$

a. Với giá trị nào của m thì $f(x) < 0$ với mọi x.

b. Với giá trị nào của m thì $f(x) \geq 0$ với mọi x.

Bài tập 2: Cho tam thức

$$f(x) = (m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2).$$

a. Tìm điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x > 2$.

b. Tìm điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x < -1$.

Bài tập 3: (ĐHKT 97) Tìm m để bất phương trình

$$x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$$

nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$.

Bài tập 4: Tìm điều kiện của m để bất phương trình

$$(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 > 0, \forall x \in (1, 2).$$

Bài tập 5: Tìm điều kiện của m để bất phương trình

$$3(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 1 < 0, \forall x \in (-1, 3).$$

Bài tập 6: Tìm điều kiện của m để bất phương trình

$$x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in (-1, \frac{1}{2}).$$

Bài tập 7: Tìm điều kiện của m để mọi nghiệm của bất phương trình

$$x^2 + (m - 1)x - m \leq 0$$

đều là nghiệm của bất phương trình

$$x^2 - 2mx + 3 \leq 0.$$

CHƯƠNG VI
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

CHỦ ĐỀ 1
HỆ GỒM MỘT MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ MỘT BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ gồm một phương trình bậc hai và một bất phương trình là hệ có dạng:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & (1) \\ f(x) < 0 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Câu hỏi thường được đặt ra với dạng hệ trên là:

- Tìm điều kiện của tham số để hệ *vô nghiệm*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có nghiệm*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có đúng k nghiệm*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có nghiệm duy nhất*.

Cách giải: Các phương pháp thường được sử dụng là:

1. Sử dụng định nghĩa.
2. Phương pháp đồ thị.
3. Phương pháp điều kiện cần và đủ.

Bài toán 1: Giải hệ (I) bằng định nghĩa

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giải (2), giả sử tìm được tập nghiệm là X_2.

Bước 2: Khi đó:

- Để hệ *vô nghiệm* $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hoặc nếu có nghiệm thì các nghiệm đó đều không thuộc X_2.
- Để hệ *có nghiệm* $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thuộc X_2.
- Để hệ *có k nghiệm* $\Leftrightarrow$ (1) có k nghiệm thuộc X_2.
- Để hệ *có nghiệm duy nhất* $\Leftrightarrow$ (1) có đúng một nghiệm thuộc X_2.

Bài toán 2: Giải hệ (I) bằng phương pháp đồ thị

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giải sử (1), (2) cùng phụ thuộc tham số m. Ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hệ trục toạ độ Oxm.

- Biểu diễn những điểm M(x, a) thoả mãn (1). Giả sử là tập X_1.
- Biểu diễn những điểm M(x, a) thoả mãn (2) . Giả sử là tập X_2.
- Xác định miền $X = X_1 \cap X_2$.
- Chiếu vuông góc tập X lên trục m, giả sử được I_m.

Bước 2: Khi đó:

- Để hệ *vô nghiệm* $\Leftrightarrow m \notin I_m$.
- Để hệ *có nghiệm* $\Leftrightarrow m \in I_m$.

Bài toán 3: Giải hệ (I) bằng phương pháp điều kiện cần và đủ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu quả cho lớp bài toán với yêu cầu:

1. *Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất .*
2. *Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm với mọi giá trị của một tham số .*

Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

Bước 2: Tìm *điều kiện cần* cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ. Trong bước này cần có được một số kỹ năng cơ bản.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-6x+8=0 \\ x^2-4x+3<0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Bằng cách giải từng phương trình, bất phương trình trong hệ, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right. \\ 1<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x = 2$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-m^2x-m^2-1=0 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Bằng cách giải từng phương trình, bất phương trình trong hệ, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=m^2+1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=m^2+1.$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x = m^2 + 1$.

Ví dụ 3: Cho hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2(m+2)x + 5m + 6 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x < 0 & (2) \end{cases}$$

a. Tìm m để hệ có đúng một nghiệm.

b. Tìm m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

- Giải (2):

$(2) \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

Đặt :

$f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 5m + 6.$

a. Hệ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $\in (0, 2)$, ta xét:

- (1) có nghiệm kép thuộc (0, 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S/2 \in (0,2) \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

- (1) có một nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại thuộc (0, 2) (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S \in (0,2) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{6}{5}.$$

- (1) có một nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại thuộc (0, 2) (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ S - 2 \in (0,2) \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

- (1) có đúng một nghiệm thuộc (0, 2)

$$\Leftrightarrow f(0)f(2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{6}{5}$$

Vậy, với $-2 < m \le -\frac{6}{5} \vee m = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hệ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc (0, 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(2) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 5m + 6 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ 0 < m + 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{6}{5} < m < -1.$$

Vậy, với $-\frac{6}{5} < m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Vì $x_1 + x_2 = S \Leftrightarrow x_2 = S - x_1$, do đó:

$(1) \Leftrightarrow S \in (0, 2)$ và $(1) \Leftrightarrow S - 2 \in (0, 2)$

Ví dụ 4: (ĐHHH 95) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x^2+(2m+1)x+m^2+m-2=0 & (1) \\ x^4-5x^2+4<0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Giải (2):

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

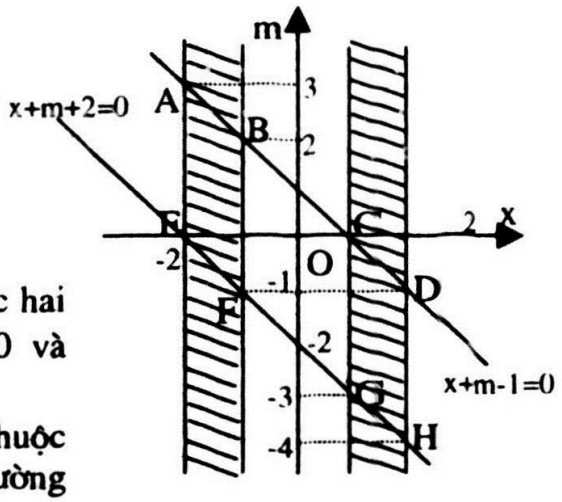
Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow t^2-5t+4<0 \Leftrightarrow 1<t<4 \Leftrightarrow 1<x^2<4 \Leftrightarrow x \in (-2,-1) \cup (1,2).$$

Cách 1 : Sử dụng phương pháp đồ thị

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} (x+m-1)(x+m+2)=0 & (3) \\ -2<x<-1 & (4) \\ 1<x<2 & (5) \end{cases} \quad (I)$$



Xét hệ toạ độ Oxm, ta có :

- Các điểm M(x, m) thoả mãn (3) thuộc hai đường thẳng (d_1) : $x + m - 1 = 0$ và (d_2) : $x + m + 2 = 0$.
- Các điểm M(x, m) thoả mãn (4) thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng $x = -2$ và $x = -1$.
- Các điểm M(x, m) thoả mãn (5) thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$.
- Các điểm M(x, m) thoả mãn hệ (I) thuộc các đoạn thẳng AB, CD, EF, GH, trong đó :

  Toạ độ của A là nghiệm của hệ :

  $$\begin{cases} x+m-1=0 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow A(-2, 3).$$

  Tương tự B(−1, 2), C(1, 0), D(2, −1), E(−2, 0), F(−1, −1), G(1, −2), H(2, −4)
- Chiếu các đoạn AB, CD, EF, GH lên Om, được

  $$I_m = (-4, -3) \cup (0, -1) \cup (2, 3)$$

Vậy, với $-4 < m < -3$ hoặc $2 < m < 3$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Cách 2 : Sử dụng định nghĩa

Hệ có nghiệm duy nhất ⇔ phương trình (1) (ký hiệu VT = f(x)) có đúng một nghiệm thuộc $X_2 = (-2, -1) \cup (1, 2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} f(-2)f(-1)<0 \\ f(1)f(2) \geq 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} f(-2)f(-1) \geq 0 \\ f(1)f(2)<0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<3 \\ -4<m<-3 \end{array}\right.$$

Vậy, với $-4 < m < -3$ hoặc $2 < m < 3$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Chú ý : Nếu nhận xét rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = -m - 2 \text{ và } x_2 = -m + 1,$$

à khoảng cách giữa hai nghiệm bằng 3 thì yêu cầu bài toán là :

$$\begin{bmatrix} x_1 = -m-2 \in (1,2) \\ x_2 = -m+1 \in (-2,-1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 < m < -3 \\ 2 < m < 3 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0 \\ x^2 - 2mx + 2m > 0 \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện cần

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} (x_0-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x_0-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(2m-x_0)-m| + m^2 + m - 2 = 0 \\ |(2m-x_0)-m|^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

Tức là $2m-x_0$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = 2m - x_0 \Leftrightarrow x_0 = m. \quad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ -m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Với m = 1, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 1 hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ bất phương trình :

a. $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 + m^2 x - 2m^2 - 4 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 \geq 0 \end{cases}$

Bài tập 2: (HVQY 97) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 6m + 5 = 0 \\ x^4 - 10x^2 + 9 < 0 \end{cases}$$

Bài tập 3: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x^2-2x+m=0 \\ x^4-4x^3+4x^2+m-10<0 \end{cases}$$

Bài tập 4: Tìm m để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x^2+7x-8<0 \\ a^2x-(3m+1)x+m(2m+1)=0 \end{cases}$$

Bài tập 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-6x+5<0 \\ x^2-2(m+1)x+m^2+1=0 \end{cases}$$

Bài tập 6: Tìm m để hệ sau có một nghiệm âm và một nghiệm dương

$$\begin{cases} x^3-2x^2-5x+6<0 \\ x^2-(m^2-1)x+3m-1=0 \end{cases}$$

Bài tập 7: Cho hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^3-3x^2-10x+24>0 \\ x^2+2(m^2-1)x-2m+1=0 \end{cases}$$

a. Tìm m để hệ có hai nghiệm âm.
b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: Viết lại :

$$\begin{cases} x^2-2(m+3)x+m^2+6m+5=0 & (1) \\ x^4-10x^2+9<0 & (2) \end{cases}$$

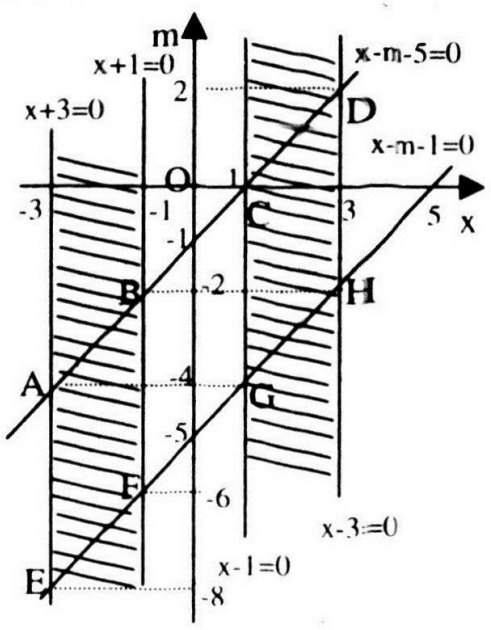
- Giải (2) :

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow t^2-10t+9<0 \Leftrightarrow 1<t<9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x<-1 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$$



Cách 1 : Sử dụng phương pháp đồ thị

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} (x-m-5)(x-m-1)=0 & (3) \\ -3<x<-1 & (4) \\ 1<x<3 & (5) \end{cases} . (I)$$

Xét hệ toạ độ Oxm, ta có :

- Các điểm M(x, m) thoả mãn (3) thuộc hai đường thẳng

$(d_1) : x-m-5=0$ và $(d_2) : x-m-1=0$.

Các điểm M(x, m) thoả mãn (4) thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng $x = -3$ và $x = -1$.

Các điểm M(x, m) thoả mãn (5) thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng $x = 1$ và $x = 3$.

Các điểm M(x, m) thoả mãn hệ (I) thuộc các đoạn thẳng AB, CD, EF, GH, trong đó :

Toạ độ của A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - m - 1 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow A(-3, -4).$$

Tương tự

$$B(-1, -2), C(1, 0), D(3, 2), E(-3, -8), F(-1, -6), G(1, -4), H(3, -2).$$

Chiếu các đoạn AB, CD, EF, GH lên Om, được

$$I_m = (-8, -6) \cup (-4, -2) \cup (0, 2)$$

Vậy, với $-8 < m < -6$ hoặc $0 < m < 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Cách 2 : Sử dụng định nghĩa

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (1) (ký hiệu VT = f(x)) có đúng một nghiệm thuộc $X_2 = (-3, -1) \cup (1, 3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-3)f(-1) < 0 \\ f(1)f(3) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-3)f(-1) \geq 0 \\ f(1)f(3) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 2 \\ -8 < m < -6 \end{array}\right.$$

Vậy, với $-8 < m < -6$ hoặc $0 < m < 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Chú ý : Nếu nhận xét rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m + 1$ và $x_2 = m + 5$ (khoảng cách giữa hai nghiệm bằng 4) thì yêu cầu bài toán là :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = m + 1 \in (1,3) \\ x_2 = m + 5 \in (-3,-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 2 \\ -8 < m < -6 \end{array}\right.$$

Bài tập 3:

Điều kiện cần

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x^2 - 4x + 4) + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x-2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} x_0(x_0 - 2) + m = 0 \\ x_0^2(x_0 - 2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(2 - x_0) - 2](2 - x_0) + m = 0 \\ [(2 - x_0) - 2]^2(2 - x_0)^2 + m - 10 < 0 \end{cases}$$

Tức là $2 - x_0$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1. \quad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} -1+m=0 \\ m-9<0 \end{cases} \Rightarrow m=1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Với m = 1, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ x^4-4x^3+4x^2-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2(x-2)^2-9<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x^2-2x-3)(x^2-2x+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 1 hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

CHỦ ĐỀ 2
HỆ GỒM HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ gồm hai bất phương trình bậc hai là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \le 0 \quad (1) \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \le 0 \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Câu hỏi thường được đặt ra với dạng hệ trên là:

- Tìm điều kiện của tham số để hệ *vô nghiệm*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có nghiệm*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có nghiệm duy nhất*.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ *có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng k*.

Cách giải: Phương pháp thường được sử dụng là dùng định nghĩa

Bài toán 1: Giải hệ (I) bằng định nghĩa

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giải (1), giả sử tìm được tập nghiệm là X_1.

Bước 2: Giải (2), giả sử tìm được tập nghiệm là X_2.

Bước 3: Khi đó:

- Để hệ *vô nghiệm* $\Leftrightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing$.
- Để hệ *có nghiệm* $\Leftrightarrow X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.
- Để hệ *có nghiệm duy nhất* $\Leftrightarrow X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$.
- Để hệ *có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng k*

$$\Leftrightarrow X_1 \cap X_2 = [\alpha, \beta] \text{ sao cho } \beta - \alpha = k.$$

Đặc biệt.

Nếu tập nghiệm của (1) là [a, b] và của (2) là [c, d] thì :

- Hệ *vô nghiệm*

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b < c \\ d < a \end{bmatrix}.$$

- Hệ *có nghiệm*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \le b \\ d \ge a \end{cases}.$$

- Hệ *có nghiệm duy nhất*

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = b \\ d = a \end{array}\right.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \le 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Bằng cách giải từng bất phương trình trong hệ, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 2 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 3.$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $2 < x \le 3$.

Ví dụ 2: Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \le 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Bằng cách giải từng bất phương trình trong hệ, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x \le 3 \\ -1 \le x < 0 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $[-1, 0) \cup (2, 3]$.

Ví dụ 3: Cho hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \le 0 & (1) \\ x^2 - 8x + 14 + m \le 0 & (2) \end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì:

a. Hệ vô nghiệm.

b. Hệ có nghiệm duy nhất.

c. Hệ có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1.

Giải.

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Giải (1)

$(1) \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

Vậy tập nghiệm của (1) là $X_1 = [1, 3]$.

Xét bất phương trình (2): $\Delta' = 2 - m$

- Với $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$

  $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

- Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$

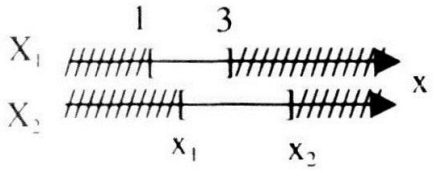
  $\Rightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $x = 4 \notin X_1 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

- Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$

  $\Rightarrow$ (2) có tập nghiệm là $X_2 = [4 - \sqrt{2-m}\,,\, 4 + \sqrt{2-m}\,]$.

a. Hệ vô nghiệm khi:

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 < 4 - \sqrt{2-m} \\ 4 + \sqrt{2-m} < 1 \end{bmatrix}$$



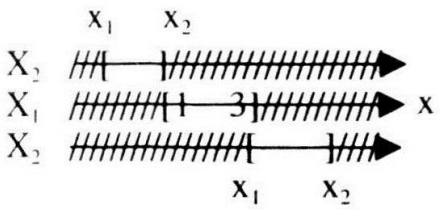
$\Leftrightarrow \sqrt{2-m} < 1 \Leftrightarrow m > 1.$

Kết hợp với điều kiện đang xét, ta được $1 < m < 2$.

Vậy hệ vô nghiệm khi $m > 1$.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi

$$X_1 \cap X_2 = \{x_0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 = 4 - \sqrt{2-m} \\ 4 + \sqrt{2-m} = 1 \end{bmatrix}$$



$\Leftrightarrow \sqrt{2-m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 1$.

Lưu ý: Nếu các em học sinh đánh giá ngay $4 + \sqrt{2-m} > 4$ sẽ dẫn đến nhận xét điều kiện chỉ có thể là:

$$4 + \sqrt{2-m} = 3.$$

Ta sẽ sử dụng đánh giá trên cho câu hỏi c).

c. Vì $4 + \sqrt{2-m} > 4$, do đó hệ có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1 khi

$$4 - \sqrt{2-m} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-m} = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy hệ có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1 khi $m = -2$.

Ví dụ 4: (HVQHQT 97) Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 & (1) \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} (x-2)(x-m) < 0 \\ (x+7)(x+m) < 0 \end{cases}.$$

Dễ thấy $m = 2$ hoặc $m = 7$ hệ vô nghiệm.

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Xét các trường hợp:

a. Nếu $m > 7$, ta có:

$X_1 = (2, m)$ và $X_2 = (-m, -7)$

$\Rightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

b. Nếu $2 < m < 7$, ta có:

$X_1 = (2, m)$ và $X_2 = (-7, -m)$

$\Rightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

c. Nếu $m < 2$, ta có:

$X_1 = (m, 2)$ và $X_2 = (-7, -m)$

Hệ có nghiệm khi $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow m < -m \Leftrightarrow m < 0$.

Ví dụ 5: (ĐHBK 95) Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2+(2-3m^2)x-6m^2<0 & (1) \\ x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\geq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow -2 < x < 3m^2$

Vậy nghiệm của (1) là $X_1 = (-2, 3m^2)$

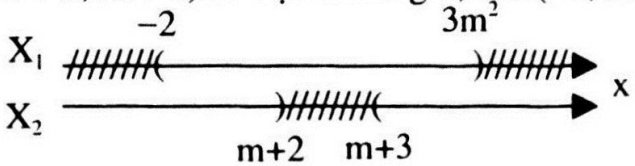
$(2) \Leftrightarrow x \leq m + 2 \vee x \geq m + 3$

Vậy nghiệm của (2) là $X_2 = R\backslash(m + 2, m + 3)$

Nhận xét rằng:

$X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$

bởi khoảng $(m + 2, m + 3)$ có độ dài bằng 1, còn $(-2, 3m^2)$ có độ dài ≥ 2.



Vậy, hệ phương trình có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 6: (ĐHNT 97) Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-2x-m+1\leq 0 & (1) \\ x^2-(2m+1)x+m^2+m\leq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta có:

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$,

Khi đó $X_1 = [1 - \sqrt{m}\ ,\ 1 + \sqrt{m}\ ]$

$(2) \Leftrightarrow X_2 = [m, m+1]$

Vậy hệ có nghiệm khi

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 + \sqrt{m} \\ 1 - \sqrt{m} \leq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: hệ có nghiệm khi $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 7: Xác định m sao cho với mọi x ta đều có:

$$-9 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 6. \qquad (*)$$

Giải.

Vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x$, nên bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{cases} 12x^2 - (m-9)x + 3 > 0 \quad (1) \\ 3x^2 + (m+6)x + 12 > 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Vậy, (*) đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 4.3.12 < 0 \\ (m+6)^2 - 4.3.12 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 21 \\ -18 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Vậy với $-3 < m < 6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ bất phương trình :

a. $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ 3x^2 - 8x - 3 \leq 0 \end{cases}$.

Bài tập 2: Cho hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 \leq 0 \\ 3x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases}.$$

a. Tìm m để hệ vô nghiệm.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 3: (Đề 57) Cho hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2+2x+m \le 0 \\ x^2-4x-6m \le 0 \end{cases}.$$

a. Tìm m để hệ có nghiệm.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 4: (Đề 58) Giải và biện luận theo m hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} (x-1)(x-2m) \le 0 \\ (x+2)(x+m) \le 0 \end{cases}.$$

Bài tập 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \le 0 \\ mx+m-2 > 0 \end{cases}.$$

Bài tập 6: Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-2x+m-1 \le 0 \\ x^2+4x+2m-3 \le 0 \end{cases}.$$

Bài tập 7: Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} (m-x^2)(x-2+m) < 0 \\ x^2-1 \le 0 \end{cases}.$$

Bài tập 8: Xác định m sao cho với mọi x ta đều có:

$$1 \le \frac{3x^2-mx+5}{2x^2-x+1} < 6.$$

CHỦ ĐỀ 3
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ bất phương trình bậc hai hai ẩn số là tập hợp gồm nhiều bất phương trình bậc hai hai ẩn số.

Bài toán: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} f(x, y, m) \le 0 \\ g(x, y, m) \le 0 \end{cases} \quad (I)$$

Tìm giá trị của m để hệ (I) thoả mãn điều kiện K

Cách giải: Đối với hệ bất phương trình hai ẩn chứa tham số, phương pháp thường được sử dụng đối với các em học sinh lớp 10 là *"Phương pháp điều kiện cần và đủ"*, và sau này chúng ta cong biết tới *phương pháp đồ thị*.

Bài toán: Giải hệ (I) bằng phương pháp điều kiện cần và đủ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

Bước 2: *Điều kiện cần*

Dựa vào điều kiện K và đặc thù của các hàm số f(x, y, m) và g(x, y, m) ta xác định được một điều kiện ràng buộc cho m, giải sử $m \in D_m$. Vậy $m \in D_m$ chính là điều kiện cần để hệ (I) thoả mãn điều kiện K.

Bước 3: *Điều kiện đủ*

Giả sử $m \in D_m$. Ta cần xác định trong các giá trị ấy của m, giá trị nào làm cho hệ (I) thoả mãn điều kiện K.

Thông thường trong bước này, ta chỉ phải xét các hệ cụ thể (thường là hệ không có tham số hoặc nếu có thì hệ đã được đơn giản đi nhiều). Kết quả của bước này cho phép ta loại đi khỏi tập D_m các giá trị không thích hợp của m.

Kết hợp hai bước giải trên ta tìm được lời giải của bài toán đã cho.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (ĐHGT TPHCM 99) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2 \le m \\ (x+1)^2+y^2 \le m \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0), suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$x_0^2 + (x_0+1)^2 \le m \Leftrightarrow 2x_0^2 + 2x_0 - m + 1 \le 0 \quad (1)$$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = \frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ:

Khi $m = \frac{1}{2}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2 \le \frac{1}{2} \\ (x+1)^2+y^2 \le \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (II)$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + y^2 \le 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng $x = y = -\frac{1}{2}$ thoả mãn hệ (II).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{1}{2}$.

Chú ý: Bài toán trên còn có thể được giải bằng phương pháp đồ thị dựa trên việc xét vị trí tương đối của hai đường cong, và cụ thể là hai đường tròn - Đây thuộc pham vị kiến thức Hình học 12 – Các bạn có thể tham khảo trong cuốn Phương pháp giải Toán Hình giải tích trong mặt phẳng – Lê Hồng Đức – NXB Hà Nội – 2003.

Ví dụ 2: Cho hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2 \\ x - y + m = 0 \end{cases}$$

Xác định m để hệ nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 2]$.

Giải.

Điều kiện cần:

Hệ nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 2]$, do đó :

- Hệ nghiệm đúng với x = 0, ta có:

$$\begin{cases} (y-1)^2 \le 1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow (m-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2 \qquad (1)$$

- Hệ nghiệm đúng với x = 2, ta có:

$$\begin{cases} (y-1)^2 \le 1 \\ y = m + 2 \end{cases} \Rightarrow (m+1)^2 \le 1 \Leftrightarrow m^2 + 2m \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0 \qquad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra m = 0 là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

Khi m = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2.$$

Vậy với m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Bài toán trên còn có thể được giải bằng phương pháp đồ thị dựa trên việc xét vị trí tương đối của đường tròn và đường thẳng.

Ví dụ 3: (ĐHD 2000) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + 3y \geq (x + y)^2 + m \\ (x - y)^2 \leq 3y - x - m \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} (x + y)^2 + m \leq x + 3y \\ (-x + y)^2 + m \leq -x + 3y \end{cases}$$

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0), suy ra $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = 0$.

Khi đó:

$$y_0^2 + m \leq 3y_0 \Leftrightarrow y_0^2 - 3y_0 + m \leq 0 \qquad (1)$$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = \frac{9}{4}$.

Điều kiện đủ:

Khi $m = \frac{9}{4}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (y + x - \frac{3}{2})^2 \leq -2x \\ (y - x - \frac{3}{2})^2 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 6m + 5 \leq y \\ (x - y - m - 2)(x - y - m - 5) \leq 0 \end{cases}$$

Xác định m để tập nghiệm của hệ chứa đoạn [2, 4] của trục hoành.

Giải.

Điều kiện cần:

Tập nghiệm của hệ chứa đoạn [2, 4] của trục hoành, do đó chứa điểm A(2, 0) và B(4, 0).

- Điểm A thoả mãn hệ, ta có:

$$\begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ m(m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0 \qquad (1)$$

- Điểm B thoả mãn hệ, ta có:

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 3 \leq 0 \\ (m + 1)(m - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2 \qquad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra $-1 \le m \le 0$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

Với $-1 \le m \le 0$, lấy một điểm $M(\alpha, 0) \in AB$ (điều kiện $2 \le \alpha \le 4$), thay toạ độ của M vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2(m+3)\alpha + m^2 + 6m + 5 \le 0 \\ (\alpha - m - 2)(\alpha - m - 5) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \le \alpha \le m+5 \\ m+2 \le \alpha \le m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m + 2 \le \alpha \le m + 5. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng với:

$$\begin{cases} -1 \le m \le 0 \\ 2 \le \alpha \le 4 \end{cases}$$

thì (*) luôn đúng $\Leftrightarrow$ toạ độ điểm M thoả mãn hệ.

Vậy với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \le m \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \le m \end{cases}.$$

Bài tập 2: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le m \\ x^2 + (y-2)^2 \le m \end{cases}.$$

Bài tập 3: Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \le 4 \\ y = 4mx^2 \end{cases}.$$

Bài tập 4: Giải biện luận hệ:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le a \end{cases}.$$

Bài tập 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7x^2 + 4xy + 2y^2 \le \dfrac{2m-1}{2m+5} \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 \ge 3 \end{cases}.$$

Bài tập 4. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7 \\ x < y \\ 2m^2 x + 3my < 0 \end{cases}$$

Bài tập 6: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2 \le 1 \\ x-y+m=0 \end{cases}$$

Bài tập 7: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-m}{1+m} \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2 \end{cases}$$

Tìm nghiệm khi hệ đó có nghiệm duy nhất.

Bài tập 8: Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y\sqrt{3} \le m \end{cases}$$

a. Giải hệ khi m = 1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

c. Tìm nghiệm của hệ khi hệ có nghiệm duy nhất

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Viết lại:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2 \le m \quad (1) \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \le m \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0), suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0$.

Khi đó:

$$(x_0-1)^2+(x_0+1)^2 \le m \Leftrightarrow 2x_0^2+2-m \le 0 \qquad (3)$$

Ta cần (3) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = 2$.

Điều kiện đủ:

Khi m = 2, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2 \le 2 \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \le 2 \end{cases} \qquad (II)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(x+1)^2+(y-1)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \le 0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

Nhận xét rằng x = y = 0 thoả mãn hệ (II).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi m = 2.

CHƯƠNG V
CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ BẬC HAI
CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình bậc cao

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một phương trình bậc cao hơn 2 ta có thể

Cách 1: Dùng phép thử trực tiếp để tìm ra một nghiệm đặc biệt.

Cách 2: Dùng phương pháp phân tích đa thức thành tích các thừa số bậc thấp hơn.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Chú ý:

1. Khi sử dụng cách 1 hoặc 2 ta cần nhớ ba tính chất sau:

(i). Nếu tổng các hệ số bằng 0, thì phương trình có một nghiệm $x = 1$. (Với phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì điều kiện là: $a + b + c + d = 0$.)

(ii). Nếu tổng các hệ bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ, thì phương trình có một nghiệm $x = -1$. (Với phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì điều kiện là: $a - b + c - d = 0$.)

(iii). Phương trình $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ (với các hệ số nguyên) nếu có nghiệm hữu tỉ, thì nghiệm đó phải là ước của $\frac{a_0}{a_n}$.

(iv). Với phương trình bậc ba ta còn có:

Nếu $ac^3 = bd^3$ $(a, d \neq 0)$ thì (1) có nghiệm $x = -\frac{c}{b}$.

2. Khi sử dụng cách 3 ta cần nhớ các dạng đặt ẩn phụ sau:

Dạng 1: Phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

bằng cách đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$ ta nhận được phương trình bậc hai theo t.

Dạng 2: Phương trình hồi quy

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ với } a \neq 0 \text{ và } \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2 ; e \neq 0$$

Với nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, ta thực hiện phép chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{e}{a}.\frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{b}.\frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = (x + \frac{d}{b}.\frac{1}{x})$, suy ra $x^2 + \frac{c}{a}.\frac{1}{x^2} = t^2 - 2.\frac{d}{b}$, ta nhận được phương trình bậc hai theo t.

Dạng 3: Phương trình

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m, \text{ với } a + b = c + d$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (c + d)x + cd] = m.$$

Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab$ (điều kiện $t \geq -\frac{\Delta}{4}$), suy ra

$$x^2 + (c + d)x + cd = t - ab + cd,$$

ta nhận được phương trình bậc hai theo t.

Dạng 4 Phương trình

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$

Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + a = t + \frac{a-b}{2} \\ x + b = t - \frac{a-b}{2} \end{cases},$$

ta nhận được phương trình bậc hai theo t.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0. \quad (1)$$

Giải.

Nhận xét rằng

$$a - b + c - d = 0$$

nên phương trình có nghiệm $x = -1$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -1/2 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0. \quad (1)$$

Giải.

Nhận xét rằng

$a = 3$ có ước là $\pm 1, \pm 3$ và $d = 2$ có ước là $\pm 1, \pm 2$

do đó phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ thì chỉ có thể là một trong các giá trị

$$\pm\ , \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}.$$

Nhận thấy $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (3x-2)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x-2=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \frac{2}{3}$, $x = 1-\sqrt{3}$, $x = 1+\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$x^3 + x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Nhận xét rằng

$$ac^3 = 1.(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$$

do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})[x^2+(\sqrt{2}+1)x+2]=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-\sqrt{2}=0 \\ x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Cách 1:

Nhận xét rằng phương trình có nghiệm $x = 1$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^3-7x^2+36)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-9x+18)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x^2-9x+18=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-2 \\ x=3 \\ x=6 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Cách 2:

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2-4x)^2 - 9(x^2-4x) + 36 = 0 \qquad (2)$$

Đặt $t = x^2 - 4x$, điều kiện $t \geq -4$.

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 9t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=12 \\ t=-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2-4x=12 \\ x^2-4x=-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-2 \\ x=3 \\ x=6 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình:

$$2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m) = 0. \quad (1)$$

có 3 nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 27.

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 1)[2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Trước hết: phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ 17 + 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1 + \sqrt{7}}{6} \\ -\dfrac{17}{6} \neq m < \dfrac{1 - \sqrt{7}}{6} \end{cases}.$$

Khi đó: (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1 . x_2 = \dfrac{3(1 + 2m)}{2} \end{cases}.$$

Tổng bình phương hoành độ các cực trị bằng 28

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1^2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 27$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 - 3(1 + 2m) = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{12} \quad (1) \end{cases}.$$

Vậy với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Cho phương trình:

$$x^4 + (2m - 1)x^3 + (m^2 - 2m)x^2 - (m^2 - m + 1)x - m + 1 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = −1.

b. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 1)(x^3 + 2mx^2 + m^2x + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^3 + 2mx^2 + m^2x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (I)$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng:

$$xm^2 + (2x^2 + 1)m + x^3 - 1 = 0$$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m. Giải ra t được:

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 - x \\ m = -\dfrac{x^2 + x + 1}{x} \end{array}\right.$$

Do đó (2) được chuyển về dạng:

$$(x + m - 1)[x^2 + (m + 1)x + 1] = 0.$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + m - 1 = 0 \\ g(x) = x^2 + (m+1)x + 1 = 0 \end{array}\right. \qquad (3) \qquad (II)$$

a. Với $m = -1$:

$$(II) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = 2$.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và $1 - m$ và $1 - m \neq 1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(1-m) \neq 0 \\ 1 - m \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 3 \neq 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \neq \dfrac{3}{2} \\ m < -3 \end{array}\right.$$

Vậy với $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \setminus \{\frac{3}{2}\}$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 7: Cho phương trình:

$$mx^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 1 = 0. \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình :

a. Có nghiệm duy nhất.
b. Có hai nghiệm phân biệt.
c. Có ba nghiệm phân biệt.
d. Có bốn nghiệm phân biệt.

Giải.

Đặt $t = x^2$ với $t \geq 0$, phương trình có dạng:

$$f(t) = mt^2 - 2(m - 1)t + m - 1 = 0. \qquad (2)$$

Trường hợp 1. Với $m = 0$

$$(2) \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$.

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 = t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{m} \leq 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Vậy với $0 \leq m < 1$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt .

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt .

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy với $m < 0$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt .

Ví dụ 8: Cho phương trình

$$x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\dfrac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + mx + 2m + m.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) + m(x + \frac{1}{x}) + 2m = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$ và suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + mt + 2m - 2 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -\frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \quad (1).$$

Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $|t| \geq 2$.

Xét bài toán ngược: *"Tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm"*.

Phương trình đã cho vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có hai nghiệm thuộc } (-2,2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta \geq 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 8m - 8 < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2 - 8m - 8 \geq 0 \\ 2 > 0 \\ 4m + 2 > 0 \\ -2 < -\frac{m}{2} < 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$ phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 9: Cho phương trình:

$$(m - 2)x^4 - 2mx^3 - (m - 5)x^2 + 2mx + m - 2 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải.

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$(m - 2)x^2 - 2mx - (m - 5) + 2m.\frac{1}{x} + \frac{m - 2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2m(x - \frac{1}{x}) - m + 5 = 0. \quad (2)$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(m-2)t^2 - 2mt + m + 1 = 0. \quad (3)$$

a. Với $m = -1$, ta được:

$$-3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

- Với $t = 0$, ta được:

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1.$$

- Với $t = \frac{2}{3}$, ta được:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Vậy với $m = -1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \neq 2.$$

Vậy với $-2 < m \neq 2$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = m. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

b. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m.$$

Đặt $t = x^2 + 4x - 5$, điều kiện $t \geq -9$.

Suy ra $x^2 + 4x + 3 = t + 8$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$t(t+8) = m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 8t - m = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = 9$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -9 \end{array}\right.$$

- Với t = 1, ta được:

$$x^2 + 4x - 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8}.$$

- Với t = −9, ta được:

$$x^2 + 4x - 5 = -9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$ và $x_3 = -2$.

b. Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $t_1 \le t_2 = -9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ f(-9) = 0 \\ S/2 \le -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m \ge 0 \\ 9 - m = 0 \\ -4 \le -9 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có đúng một nghiệm.

c. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $-9 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-9) > 0 \\ S/2 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \\ -4 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Vậy, với $-16 < m < 9$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Ví dụ 11: Cho phương trình:

$$(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 2m. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc (−3, −1).

Giải.

Đặt $t = x + \frac{1+3}{2} = x + 2$, suy ra

$$\begin{cases} x + 1 = t - 1 \\ x + 3 = t + 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2m \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2m \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0. \quad (2)$$

Đặt $u = t^2$, $u \ge 0$.

Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0. \quad (3)$$

a. Với m = 1, phương trình (3) có dạng:

$$u^2 + 6u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -6 \ (l) \end{cases}.$$

- Với $u = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm x = −2.

b. Ta có :

$-3 < x < -1 \Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 1 \Leftrightarrow |t| < 1 \Leftrightarrow t^2 < 1 \Leftrightarrow u < 1.$

Vậy, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3, -1)$

$\Leftrightarrow$ (3) có 1 nghiệm $\in (0, 1) \Leftrightarrow f(0).f(1) < 0$

$\Leftrightarrow (1 - m)(8 - m) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 8.$

Vậy, với $1 < m < 8$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 12: Cho phương trình:

$$(m + 1)x^4 - 3mx^2(x^2 + 1) + 4m(x^2 + 1)^2 = 0$$

a. Giải phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 + 1 \neq 0$. ta được:

$$(m + 1).\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4m = 0. \qquad (1)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x^2+1}$, $0 \le t \le 1$. (*)

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow (m + 1)t^2 - 3mt + 4m = 0$ (2)

a. Với $m = -2$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow -t^2 + 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 2 \\ t = -4 \end{bmatrix}, \text{ không thoả mãn (*).}$$

Vậy với $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Khi đó

$(2) \Leftrightarrow -3t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$ loại $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thuộc $[0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2) \text{ có một nghiệm thuộc } [0,1] \\ (2) \text{ có một nghiệm thuộc } [0,1] \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m^2 - 8m - 8 < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 8m - 8 \ge 0 \\ 2 > 0 \\ 4m + 2 > 0 \\ -2 < -\frac{m}{2} < 2 \end{cases} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le 0.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} \le m \le 0$ phương trình đã cho có nghiệm.

II. PHƯƠNG TRÌNH CÓ ẨN SỐ Ở MẪU

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đối với các phương trình có ẩn ở mẫu, ta thực hiệntheo các bước:

- Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.
- Khử mẫu, đưa phương trình về dạng thông thường.
- Kiểm tra điều kiện cho các nghiệm tìm được.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình

$$x^2 + (x+1)^2 = \frac{m}{x^2 + x + 1}$$

có nghiệm.

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2(x^2 + x + 1) - 1 = \frac{m}{x^2 + x + 1}. \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 + x + 1$, $t \geq \frac{3}{4}$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow t(2t-1) = m \Leftrightarrow 2t^2 - t - m = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{(2) có một nghiệm lớn hơn bằng 3/4} \\ \text{(2) có hai nghiệm lớn hơn bằng 3/4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} af(3/4) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(3/4) \geq 0 \\ S/2 \geq 3/4 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy, với $m \geq \frac{3}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}.$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}. \qquad (*$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0. \quad (1)$$

Ta tính biệt thức $\Delta = 4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m + 1$ và $x_2 = m - 3$.

- Xét nghiệm $x_1 = m + 1$, thoả mãn (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq -1 \\ m+1 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

- Xét nghiệm $x_2 = m - 3$, thoả mãn (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq -1 \\ m-3 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Kết luận:

- Với $m = -3$, phương trình có nghiệm $x = -6$.
- Với $m = -2$, phương trình có nghiệm $x = -5$.
- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = 2$.
- Với $m = 2$, phương trình có nghiệm $x = -3$.
- Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq -3$; $m \neq \pm 2$; $m \neq 0$ và $m \neq 1$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = m + 1$ và $x_2 = m - 3$.

Ví dụ 3: (Đề 68): Giải và biện luận phương trình

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2.$$

Giải.

Điều kiện $x \neq a$ và $x \neq b$. (*)

- Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2x^2 - 3(a+b)x + a^2 + b^2 + 2ab = 0. \quad (1)$$

Ta tính biệt thức $\Delta = (a+b)^2 \geq 0$.

a. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b$,

Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = 0$.

Khi đó điều kiện (*) là $x \neq \pm a$, do đó ta phải có $a \neq 0$.

b. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a \neq -b$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = a + b$ và $x_2 = \frac{a+b}{2}$.

- Xét nghiệm $x_1 = a + b$, thoả mãn điều kiện (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \neq a \\ a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

- Xét nghiệm $x_2 = \frac{a+b}{2}$, thoả mãn điều kiện (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \neq 2a \\ a+b \neq 2b \end{cases} \Leftrightarrow a \neq b.$$

Kết luận:

- Với $a = -b \neq 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 0$.
- Với $a = b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = 2a$.
- Với $a = b = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{b}{2}$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{a}{2}$.
- Với $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = a + b \text{ và } x_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Ví dụ 4: (Đề 29): Giải và biện luận phương trình

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}.$$

Giải.

Điều kiện $x \neq 0$ và $a \neq \pm b$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0. \quad (1)$$

Vì $a \neq \pm b \Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0$, ta đi tính biệt thức $\Delta' = 4a^2b^2 \geq 0$.

a. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } b = 0 \end{array}\right.$.

- Với $a = 0$ và $b \neq 0$

  Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$

  Phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = 1$.

b. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4a^2b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{a-b}{a+b}$ và $x_2 = \frac{a+b}{a-b}$.

Kết luận:

- Với $a = \pm b$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 1$.
- Với $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{a-b}{a+b} \text{ và } x_2 = \frac{a+b}{a-b}.$$

III. SƠ LƯỢC PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình chứa trị tuyệt đối.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối có thể

Cách 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Các phép biến đổi quan trọng sử dụng định nghĩa để khử dấu trị tuyệt đối cho phương trình bao gồm:

- Với dạng: $|f(x)| = |g(x)|$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow [f(x) - g(x)].[f(x) + g(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

- Với dạng: $|f(x)| = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

hoặc

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(II)}$$

Lưu ý: Tuỳ thuộc vào độ phức tạp về dấu của f(x) và g(x) để ta lựa chọn phép biến đổi (I) hoặc (II).

Cách 2: Dùng phương pháp chia khoảng.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (CĐHQ 99): Giải phương trình:

$$|x^2 - x| + |2x - 4| = 3.$$

Giải.

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - x$ và $2x - 4$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	−	|	+	|	+	
$2x - 4$		−	|	−	|	−	0	+	

Trường hợp 1: với $x \leq 0$ hoặc $1 \leq x \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \text{ (loại).}$$

Trường hợp 2: với $0 < x < 1$

$$(1) \Leftrightarrow -(x^2 - x) - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \overset{0<x<1}{\Leftrightarrow} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 3: với $x \geq 2$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \overset{x\geq 2}{\Leftrightarrow} x = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và $x = \frac{\sqrt{29}-1}{2}$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình:

$$|x^2 - 2mx - 2m| = |x^2 + 2x|. \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 2mx - 2m = x^2 + 2x \\ x^2 - 2mx - 2m = -x^2 - 2x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (m+1)x = -m & (2) \\ x^2 - (m-1)x - m = 0 & (3) \end{bmatrix}.$$

a. Giải và biện luận (2)

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

  $(2) \Leftrightarrow 0 = 1$ vô nghiệm.

- Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

  $$(2) \Leftrightarrow x = -\frac{m}{m+1}.$$

b. Giải và biện luận (3)

Ta có $\Delta = (m-1)^2 + 4m = (m+1)^2$.

- Với $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$

  $(3) \Leftrightarrow x = -1$.

- Với $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

  $$(3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = m \end{bmatrix}.$$

Kết luận:

- Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = -1$.
- Với $m \neq -1$, phương trình có 3 nghiệm $x = -\frac{m}{m+1}$, $x = -1$ và $x = m$.

Chú ý:

a Nếu bài toán yêu cầu " *Tìm m để phương trình vô nghiệm* " thì điều kiện là:

$$\begin{cases} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (3) \text{ vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \\ -m \neq 0 \\ \Delta_{(3)} < 0 \end{cases}.$$

b Nếu bài toán yêu cầu " *Tìm m để phương trình có nghiệm* " thì điều kiện là:

$$\begin{bmatrix} (2) \text{ có nghiệm} \\ (3) \text{ có nghiệm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m+1 \neq 0 \\ \Delta_{(3)} \geq 0 \end{bmatrix}.$$

c Nếu bài toán yêu cầu " *Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất* " thì điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2)\text{ có nghiệm}\\(3)\text{ vô nghiệm}\end{cases}\\\begin{cases}(2)\text{ có nghiệm } x_0\\(3)\text{ có nghiệm kép } x_0\end{cases}\\\begin{cases}(2)\text{ vô nghiệm}\\(3)\text{ có nghiệm kép}\end{cases}\end{array}\right.$$

d Nếu bài toán yêu cầu " *Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt* " thì điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2)\text{ có nghiệm } x_0\\(3)\text{ có nghiệm kép} \neq x_0\end{cases}\\\begin{cases}(2)\text{ có nghiệm } x_0\\(3)\text{ có 2 nghiệm phân biệt với 1 nghiệm là } x_0\end{cases}\\\begin{cases}(2)\text{ vô nghiệm}\\(3)\text{ có 2 nghiệm phân biệt}\end{cases}\end{array}\right.$$

e Nếu bài toán yêu cầu " *Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt* " thì điều kiện là:

$$\begin{cases}(2)\text{ có nghiệm } x_0\\(3)\text{ có 2 nghiệm phân biệt} \neq x_0\end{cases}$$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$|x^2 - 2x + m| = x^2 - 3x + m + 1. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$|x^2 - 2x + m| = x^2 - 3x + m + 1 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = (x^2 - 2x + m) + (1 - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 - 2x + m \geq 0\\1 - x = 0\end{cases}\\\begin{cases}x^2 - 2x + m < 0\\1 - x = -2(x^2 - 2x + m)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 - 2x + m \geq 0\\x = 1\end{cases}\\\begin{cases}1 - x > 0\\2x^2 - 5x + 2m + 1 = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) = x^2 - 2x + m \geq 0 \quad (2)\\x = 1\end{cases} \quad (I)\\\begin{cases}x < 1\\g(x) = 2x^2 - 5x + 2m + 1 = 0 \quad (3)\end{cases} \quad (II)\end{array}\right.$$

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(I) có 1 nghiệm } x = 1 \\ \text{(II) có 2 nghiệm phân biệt } x_1 < x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ \Delta_{(3)} > 0 \\ ag(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4: (Đề 63). Giải và biện luận phương trình:

$$|x + 2|(x - 1) + m = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geq -2 \\ f(x) = x^2 + x + m - 2 = 0 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x < -2 \\ f(x) = x^2 + x - m - 2 = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{array}\right.$$

a Giải và biện luận (I)

Ta có:

$\Delta_{(1)} = 9 - 4m$,

$af(-2) = m$,

$\dfrac{S}{2} + 2 = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó ta có bảng tổng kết sau:

m	$\Delta_{(1)}$	$af(-2)$	$\frac{S}{2}+2$	Vị trí số -2	Nghiệm của (I)
$-\infty$				$x_1 < -2 < x_2$	(I) có nghiệm $x = x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{\Delta_{(1)}}}{2}$
	+	−	+		
0	0	0		$x_1 = -2, x_2 = 1$	(I) có nghiệm $x_1 = -2, x_2 = 1$.
	+	+	+	$-2 < x_1 < x_2$	(I) có nghiệm $x = x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\Delta_{(1)}}}{2}$
9/4	0			$x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$	(I) vô nghiệm
	−	+	+	vô nghiệm	(I) vô nghiệm
$+\infty$					

b Giải và biện luận (I)

Ta có:

$\Delta_{(2)} = 4m + 9$,

$af(2) = m$,

$\dfrac{S}{2} + 2 = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó ta có bảng tổng kết sau:

m	$\Delta_{(2)}$	af(−2)	$\frac{S}{2}+2$	Vị trí số −2	Nghiệm của (I)
$-\infty$	−	−	+	vô nghiệm	vô nghiệm
−9/4	0			$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$	(I) vô nghiệm
	+	−	+	$x_1 < -2 < x_2$	(I) có nghiệm $x = x_1 = \frac{-1-\sqrt{\Delta_{(2)}}}{2}$
0		0		$x_1 = -2, x_2 = 1$	(I) vô nghiệm
	+	+	+	$-2 < x_1 < x_2$	(I) vô nghiệm
$+\infty$					

Kết luận:

- Với $m \le -\frac{9}{4}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{\Delta_{(1)}}}{2}$.
- Với $-\frac{9}{4} < m < 0$ phương trình có 2 nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{\Delta_{(1)}}}{2} \text{ và } x = \frac{-1-\sqrt{\Delta_{(2)}}}{2}$$

- Với m = 0, phương trình có 2 nghiệm x = −2 và x = 1.
- Với $0 < m < \frac{9}{4}$, phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta_{(1)}}}{2}$.
- Với $m \ge \frac{9}{4}$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình

$$(x-1)^2 = 2|x-m|$$

có 4 nghiệm phân biệt.

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\left[\begin{cases} x \ge m \\ (x-1)^2 = x-m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \ge m \\ f(x) = x^2 - 3x + m + 1 = 0 \quad (1) \end{cases} \right. \right. \quad (I)$$

$$\left.\left.\begin{cases} x < m \\ (x-1)^2 = m-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < m \\ g(x) = x^2 - x - m + 1 = 0 \quad (2) \end{cases} \right.\right] \quad (II)$$

Vậy phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (I) và (II) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ có 2 nghiệm } m \le x_1 < x_2 \\ (2) \text{ có 2 nghiệm } x_3 < x_4 < m \end{cases}$$

a. Phương trình (1) có hai nghiệm $m \le x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ f(m) > 0 \\ S/2 > m \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}. \quad (3)$$

b. Phương trình (2) có hai nghiệm $x_3 < x_4 < m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(m) > 0 \\ S/2 < m \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \ne 1. \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được:

$$\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < m \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} < m < 1 \\ 1 < m < \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi $\frac{1}{2} < m < 1$ hoặc $1 < m < \frac{3}{2}$.

IV. SƠ LƯỢC PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình vô tỉ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối có thể

Cách 1: Dùng phép biến đổi tương đương. Ta cần lưu ý các phép biến đổi

- Với dạng: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \ge 0 \text{ (với điều kiện } f(x), g(x) \text{ có nghĩa).}$$

- Với dạng: $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ có nghĩa và } g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

không cần đặt điều kiện $f(x) \ge 0$.

- Với dạng: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}$$

với điều kiện $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ có nghĩa và không cần $h(x) \ge 0$

Cách 2: Phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$x - \sqrt{2x+3} = 0.$$

Giải.

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{5-x} = x - 3.$$

Giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 5 - x = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}\ .$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases}5x-1\ge 0\\3x-2\ge 0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}\Rightarrow 5x-1=x-1+3x-2+2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{(x-1)(3x-2)}\Leftrightarrow (x+2)^2=4(x-1)(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 11x^2-24x+4=0\Leftrightarrow x=2 \ (x=\frac{2}{11} \text{ loại}).$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=2$.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-9=0.$$

Giải.

Điều kiện:

$$x^2-2x-3\ge 0\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\ge 3\\x\le -1\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}$, $t\ge 0$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2(x^2-2x-3)+\sqrt{x^2-2x-3}-3=0\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{2} \ (t=1 \text{ loại}).$$

- Với $t=1$, ta được :

$$\sqrt{x^2-2x-3}=1\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5} \text{ thoả mãn (1)}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=1\pm\sqrt{5}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2.$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2-1\ge 0\\x-\sqrt{x^2-1}\ge 0\\x+\sqrt{x^2-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1. \qquad (1)$$

Nhận xét:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=1,$$

đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$, $t>0$, suy ra $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{t}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1$ ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\\ \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x^2-1}=1\\ x+\sqrt{x^2-1}=1\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}x=1.$$

Ví dụ 7: Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{x^2-1}-x=m \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x+m\geq 0\\ x^2-1=(x+m)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -m\\ 2mx=-m^2-1\ (2)\end{cases}\qquad (I)$$

- Với $m=0$

  Khi đó (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

- Với $m\neq 0$

  Khi đó (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $x\geq -m$

$$\Leftrightarrow -\frac{m^2+1}{2m}\geq -m\Leftrightarrow\frac{m^2-1}{2m}\geq 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m\geq 1\\ -1\leq m<0\end{bmatrix}.$$

Kết luận:

- Với $m\geq 1$ hoặc $-1\leq m<0$, phương trình có nghiệm $x=-\frac{m^2+1}{2m}$.
- Với $m<-1$ hoặc $0\leq m<1$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8: (HVQHQT 98): Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=a. \qquad (1)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases}a\geq 0\\ x-a\geq 0\\ x+a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq 0\\ x\geq a\end{cases}$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x - a + x + a + 2\sqrt{x^2 - a^2} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - a^2} = a^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2x \geq 0 \\ 4(x^2 - a^2) = (a^2 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{a^2}{2} \\ 4a^2x = 4a^2 + a^4 \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

- Với $a = 0$

Khi đó (I) có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $x = 0$

- Với $a > 0$

Khi đó (I) có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm thoả mãn $a \leq x \leq \dfrac{a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{4a^2 + a^4}{4a^2} \leq \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Kết luận:

- Với $a < 0$ hoặc $0 < a < 2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$, phương trình có nghiệm $x = 0$.
- Với $a \geq 2$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4}(a^2 + 4)$.

Ví dụ 9: (ĐHGT 98) Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m \qquad (1)$$

Giải.

Phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x^2 + mx - 3 = (x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x^2 + 3mx - 3 - m^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $x \geq m$.

Tam thức $f(x) = x^2 + 3mx - 3 - m^2 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1 < x_2$.

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow x_1 < x_2 < m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 > 0 \\ -\dfrac{3m}{2} < m \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 1$.

Nhận xét: Như vậy trong bài toán trên để tìm tập D_m ta đã đi xác định tập $R \setminus D_m$ bởi điều kiện cho bài toán ngược được tìm thấy đơn giản hơn.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2m.\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

Với $x > 0$, suy ra $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \geq 2$, do đó điều kiện là $t \geq 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (loại).

Vậy, với $m = -1$ phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $t \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có một nghiệm lớn hơn bằng } 2 \\ (2) \text{ có hai nghiệm lớn hơn bằng } 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(2) \geq 0 \\ S/2 \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m + 5 \leq 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 4m + 5 \geq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{4}.$$

Vậy, với $m \leq -\frac{5}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm.

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

b. $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

c. $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$.

d. $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

e. $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = 9$.

f. $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 12$.

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b) = 0.$$

Biết rằng phương trình có một nghiệm không phụ thuộc vào a, b.

Bài tập 3: Giải phương trình:

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Biết rằng phương trình có hai nghiệm trái dấu nhưng bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

Bài tập 4: Giải và biện luận các phương trình:

a. $x^4 - (m + 2)x^2 + m = 0.$

b. $mx^4 + 2x^2 - 2 = 0.$

c. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0.$

Bài tập 5: Cho phương trình

$$x^4 - 4mx^3 + (m + 1)x^2 - 4mx + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = 2m.$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

e. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

f. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$. (x + 2)^4 + (x + 6)^4 = m^2 - 2.$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2, -1)$.

Bài tập 8: Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình:

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c \text{ có nghiệm.}$$

Bài tập 9: Cho phương trình

$$\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^2 - m.\ \frac{2x}{1 + x^2} + 4 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -5$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a. $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8.$

b. $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$

c. (ĐHLN – 99): $2|x^2 + 6x + 8| + |x^2 - 1| = 30.$

Bài tập 11: Giải và biện luận phương trình:

a. $|mx + 1| = |2x + m - 3|.$

b. $|x - 1| = mx + 2m - 1.$

c. $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

d. $|x - 1|(x + 2) + m = 0$.

Bài tập 12: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x + |x^2 - 2x + m| = 0$$

Bài tập 13: Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$|x^2 - 3x + m| = x^2 - 2x + m - 1. \quad (1)$$

Bài tập 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $x(4 - x) + m = |x - 2|$.

b. $|x + m^2| + |x + 1| = |m + 1|$.

c. $mx^2 - 2(m - 1)x + 2 = |mx - 2|$.

Bài tập 15: Giải các phương trình sau:

a. $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$.

b. (ĐHQG TPHCM khối D 98): $\sqrt{x + 9} = 5 - \sqrt{2x + 4}$.

Bài tập 16: Giải các phương trình sau:

a. (ĐHD 99): $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$.

b. (HVKTQS 2000): $x - 2\sqrt{x - 1} - (x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = 0$.

Bài tập 17: (ĐHKTQD 98): Cho phương trình:

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{8 - x} + \sqrt{(1 + x)(8 - x)} = a.$$

a. Giải phương trình với $a = 3$.

b. Tìm a để phương trình có nghiệm.

c. (Thêm) Tìm a để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 18: (ĐHBK 91) Tìm m để phương trình

$$x + \sqrt{1 - x^2} = m$$

có nghiệm.

Bài tập 19: (ĐHQG Khối B 98) Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = a.$$

Bài tập 20: (ĐHTM 99) Giải và biện luận phương trình:

$$m - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x.$$

CHỦ ĐỀ 2
BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải bất phương trình bậc cao

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một phương trình bậc cao hơn 2 ta có thể

Cách 1: Dùng phương pháp phân tích đa thức thành tích các thừa số bậc thấp hơn, từ đó lập bảng xét dấu để nhận được nghiệm của bất phương trình.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}<x.$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x<0 \Leftrightarrow \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2+5x+6}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)}>0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		3		$+\infty$
VT		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy, nghiệm của bất phương trình là:

$$(-3,-2)\cup(1,2)\cup(3,+\infty).$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{2-x}{x^3+x^2}>\frac{1-2x}{x^3-3x^2}.$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{2-x}{x^2(x+1)}>\frac{1-2x}{x^2(x-3)} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{2-x}{x+1}>\frac{1-2x}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x+7)(x-1)}{(x+1)(x-3)}>0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-7		-1		0		1		3		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy, nghiệm của bất phương trình là:

$$(-\infty,-7) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty).$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình:

$$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0.$$

Giải.

Đặt $t = x^2 + 4x + 10$, điều kiện $t \geq 6$

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 7(t + 1) + 7 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 10 < 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là: $(-3, -1)$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$x^2 + (x + 1)^2 \leq \frac{15}{x^2 + x + 1}. \qquad (1)$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2(x^2 + x + 1) - 1 \leq \frac{15}{x^2 + x + 1}. \qquad (2)$$

Đặt $t = x^2 + x + 1$, $t \geq \frac{3}{4}$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow t(2t - 1) \leq 15 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 15 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $[-2, 1]$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải phương trình chứa trị tuyệt đối.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối có thể

Cách 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Các phép biến đổi quan trọng sử dụng định nghĩa để khử dấu trị tuyệt đối cho phương trình bao gồm:

- Với dạng: $|f(x)| > |g(x)|$

$$\Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow [f(x) - g(x)].[f(x) - g(x)] > 0.$$

- Với dạng: $|f(x)| > g(x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < g(x) \end{array}\right.$$

- Với dạng: $|f(x)| < g(x)$

$$\Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x).$$

Cách 2: Dùng phương pháp chia khoảng.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1.$$

Giải.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow \frac{8 - 5x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x(2x - 5)}{x^2 - 4} \le 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		$8/5$		2		$5/2$		$+\infty$
VT		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- Vậy, nghiệm của bất phương trình là:

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup [\frac{8}{5}, 2) \cup (2, \frac{5}{2}].$$

Ví dụ 2: (ĐHVH – 98): Giải bất phương trình:

$$|x^2 - 2x - 3| \le 3x - 3. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow -3x + 3 \le x^2 - 2x - 3 \le 3x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 \ge 0 \\ x^2 - 5x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 5.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $[2, 5]$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình:

$$|x - 5| - x^2 + 7x - 9 \ge 0. \qquad (1)$$

Giải.

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 5 \ge 0 \\ x^2 - 8x + 14 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 4 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le x \le 4 + \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{5} \le x < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \le x \le 4 + \sqrt{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $3 - \sqrt{5} \le x \le 4 + \sqrt{2}$.

Chú ý: Bài toán trên có thể giải bằng định nghĩa như sau:

$$(1) \Leftrightarrow |x-5| \geq x^2 - 7x + 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-5 \geq x^2 - 7x + 9 \\ x-5 \leq -x^2 + 7x - 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 8x + 14 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 4 \leq 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\sqrt{2} \leq x \leq 4+\sqrt{2} \\ 3-\sqrt{5} \leq x \leq 3+\sqrt{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow 3-\sqrt{5} \leq x \leq 4+\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} \geq 1. \qquad (1)$$

Giải.

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - 4x$ và $x - 5$:

x	$-\infty$		0		4		5		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	−	0	+	|	+	
$x - 5$		−	|	−	|	−	0	+	

Trường hợp 1: với $x \leq 0$ hoặc $4 \leq x \leq 5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2: với $0 < x < 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Trường hợp 3: với $x > 5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 5} \geq 1 \Leftrightarrow 5x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{5} \text{ loại.}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là: $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [\frac{1}{2}, 2]$

Ví dụ 5: (Đề 60): Giải và biện luận bất phương trình:

$$2|x - a| < -x^2 + 2ax - 2. \qquad (1)$$

Giải.

Đặt $t = |x - a|$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$2t < a^2 - t^2 - 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - a^2 + 2 < 0. \qquad (2)$$

Ta có: $\Delta' = a^2 - 1$.

- Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |a| \leq 1$.

Khi đó (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |a| > 1$.

Khi đó (2) có nghiệm $-1 - \sqrt{a^2 - 1} < t < -1 + \sqrt{a^2 - 1}$.

Do vậy, để (2) có nghiệm với $t \geq 0$ thì điều kiện là:

$$-1 + \sqrt{a^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow a^2 > 2 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{2}.$$

Khi đó nghiệm của (2) là:

$$0 \leq t < -1 + \sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow |x - a| < -1 + \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}.$$

Kết luận :

- Với $|a| \leq \sqrt{2}$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $|a| > \sqrt{2}$, bất phương trình có nghiệm

$$(a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}, a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ví dụ 6: (Đề 103): Giải và biện luận theo a bất phương trình:

$$|x^2 - 2x + a| \leq |x^2 - 3x - a|. \quad (1)$$

Giải.

Sử dụng phép biến đổi tương đương, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x + a)^2 \geq (x^2 - 3x + a)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + a - x^2 + 3x + a)(x^2 - 2x + a + x^2 - 3x - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2a)(2x - 5) \leq 0. \quad (2)$$

Trường hợp 1. Nếu $-2a < 0 \Leftrightarrow a > 0$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2a \\ 0 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2. Nếu $-2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 5 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

Trường hợp 3. Nếu $0 < -2a < \dfrac{5}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ -2a \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 4. Nếu $-2a = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow a = -\dfrac{5}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow x(2x - 5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{5}{2} = 0 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \\ x \leq 0 \end{array}\right.$$

Trường hợp 5. Nếu $-2a > \frac{5}{2} \Leftrightarrow a < -\frac{5}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \frac{5}{2} \le x \le -2a \end{array}\right.$$

Ví dụ 7: (ĐHKT TPHCM – 94): Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + 2|x - m| + m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (1)$$

Giải.

Cách 1:

Đặt $t = x - m$.

Bất phương trình có dạng:

$$t^2 + 2(|t| + mt) + 2m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (2)$$

a. Với $t \ge 0$.

$$(2) \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2(m + 1)t + 2m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (3)$$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất một nghiệm $t \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm $t \ge 0$ ($0 \le t_1 \le t_2$ hoặc $t_1 \le 0 \le t_2$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \Delta' \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ S/2 \ge 0 \end{array}\right. \\ af(0) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (m+1)^2 - 2m^2 - m + 1 \ge 0 \\ 2m^2 + m - 1 \ge 0 \\ -m - 1 \ge 0 \end{array}\right. \\ 2m^2 + m - 1 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -1 \le m \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1/2 \\ m \le -1 \end{array}\right. \\ m \le -1 \end{array}\right. \\ -1 \le m \le 1/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{1}{2}$$

b. Với $t \le 0$.

$$(2) \Leftrightarrow g(t) = t^2 + 2(m - 1)t + 2m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (3)$$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất một nghiệm $t \le 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm $t \le 0$ $\left(\left[\begin{array}{l} t_1 \le t_2 \le 0 \\ t_1 \le 0 \le t_2 \end{array}\right.\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \Delta' \ge 0 \\ ag(0) \ge 0 \\ S/2 \le 0 \end{array}\right. \\ ag(0) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (m-1)^2 - 2m^2 - m + 1 \ge 0 \\ 2m^2 + m - 1 \ge 0 \\ -m - 1 \le 0 \end{array}\right. \\ 2m^2 + m - 1 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -1 \le m \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1/2 \\ m \le -1 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \end{array}\right. \\ -1 \le m \le 1/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{1}{2}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $-1 \le m \le \frac{1}{2}$.

Cách 2:

Đặt $t = |x - m|$, điều kiện $t \geq 0$.

Bất phương trình có dạng:

$$h(t) = t^2 + 2t + 2mx + m - 1 \leq 0 \quad (4)$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{t\geq 0} h(t) \leq 0$. (5)

Nhận xét rằng h(t) là một Parabol có đỉnh $t = -1 < 0$, do đó $\min\limits_{t\geq 0} h(t) = h(0)$.

Do đó:

$$(5) \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Chú ý: Trong cách 2 ta đã khéo léo thay h(0) như sau:

$$\begin{cases} h(0) = 2mx + m + 1 \\ t = |x - m| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = 2mx + m + 1 \\ x = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(0) = 2m^2 + m - 1.$$

III. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải bất phương trình vô tỉ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một bất phương trình vô tỉ có thể

Cách 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Các phép biến đổi quan trọng sử dụng định nghĩa để khử căn thức cho bất phương trình bao gồm:

- Với dạng: $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \leq f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

- Với dạng: $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$2x(x-1)+1>\sqrt{x^2-x+1}.$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2(x^2-x+1)-1>\sqrt{x^2-x+1}. \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}$, $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$2t^2-t-1>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t>1\\ t<-\frac{1}{2}\ (l)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}>1\Leftrightarrow x^2-x+1>1$$

$$\Leftrightarrow x^2-x>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x>1\\ x<0\end{bmatrix}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$x+1\ge\sqrt{2(x^2-1)}. \qquad (1)$$

Giải.

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x+1\ge0\\ 0\le2(x^2-1)\le(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\ |x|\ge1\\ x^2-2x-3\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\ |x|\ge1\\ -1\le x\le3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\ 1\le x\le3\end{bmatrix}$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình:

$$2x-5<\sqrt{-x^2+4x-3}.$$

Giải.

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{bmatrix}\begin{cases}2x-5<0\\ -x^2+4x-3\ge0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-5\ge0\\ -x^2+4x-3>(2x-5)^2\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x<5/2\\ 1\le x\le3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge5/2\\ 5x^2-24x+28<0\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\le x<5/2\\ \begin{cases}x\ge5/2\\ 2<x<14/5\end{cases}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1\le x<\frac{14}{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1\le x<\frac{14}{5}$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$(2x - 2)\sqrt{2x - 1} \le 6(x - 1).$$

Giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$. (1)

Đặt $t = \sqrt{2x - 1}$, $t \ge 0 \Rightarrow 2x = t^2 + 1$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$(t^2 + 1 - 2)t \le 3(t^2 + 1) - 6 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + 3 \le 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 1)(t - 3) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le$

$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x - 1} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ thoả mãn điều kiện (1).

Vậy nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 2$.

Chú ý: Ta không thể bình phương hai vế của bất phương trình ban đầu vì chưa khẳng định được dấu của hai vế.

Ví dụ 5: (HVQHQT Khối D 2000) Giải bất phương trình:

$$(x + 1)(x + 4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}. \quad (1)$$

Giải.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(x^2 + 5x + 28) - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} - 24 < 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$, $t \ge 0$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 5t - 24 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 8 \Rightarrow 0 < t < 8.$$

- Với $t < 8$, ta được :

$$\sqrt{x^2 + 5x + 28} < 8 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 < 0 \Leftrightarrow -9 < x < 4.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $-9 < x < 4$.

Chú ý : Nếu bài toán trên có tham số thì ta cần tìm điều kiện đúng cho t, cụ thể:

$$t = \sqrt{x^2 + 5x + 28} \ge \frac{\sqrt{87}}{2}.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình

a. $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 1} < \frac{2x + 3}{x^3 + 1}$.

b. $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0$.

Bài tập 2: Tìm điều kiện của m để bất phương trình

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (2m + 3)(x + \frac{1}{x}) + 2(m + 2) > 0, \forall x \ne 0.$$

Bài tập 3: Cho bất phương trình:

$$x^2 + 2mx + 2|x - m| + 2 > 0. \quad (1)$$

a. Xác định m để (1) có tập nghiệm là R.

b. Xác định x để (1) thoả mãn với mọi m.

Bài tập 4: Tìm m để bất phương trình sau có ít nhất 1 nghiệm âm:

$$3 - |x - m| > x^2.$$

Bài tập 5: Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 + 2|x + a| + a^2 - a - 1 \le 0$$

Bài tập 6: Giải và biện luận bất phương trình :

a. $\dfrac{|x - a| + x}{x + 2} > 2.$

b. $|x^2 - 2x| + |x| \le a.$

c. (Đề 127): $\left|\dfrac{x + 2a}{2ax + 1}\right| \le 1.$

Bài tập 7: Giải các bất phương trình:

a. (ĐHMĐC 2000): $\sqrt{(x + 1)(4 - x)} > x - 2.$

b. (ĐHBK 99): $\sqrt{x + 1} > 3 - \sqrt{x + 4}$.

c. (ĐHTL 2000): $\sqrt{x + 2} - \sqrt{3 - x} < \sqrt{5 - 2x}$.

Bài tập 8: Cho bất phương trình

$$\sqrt{m - \sqrt{x}} + \sqrt{m + \sqrt{x}} \le 2.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Xác định m để bất phương trình có nghiệm.

Bài tập 9: (ĐHQG TPHCM – 97): Cho bất phương trình

$$(x^2 + 1)^2 + m \le x\sqrt{x^2 + 2} + 4.$$

a. Giải bất phương trình với m = 3.

b. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$.

Bài tập 10: (ĐHKTQD – 94): Cho bất phương trình

$$mx - \sqrt{x - 3} \le m + 1.$$

a. Giải bất phương trình với $m = \dfrac{1}{2}$.

b. Xác định m để bất phương trình có nghiệm.

Bài tập 11: (ĐHXD HN – 95): Cho bất phương trình

$$m\sqrt{2x^2 + 7} < x + m.$$

a. Giải bất phương trình với $m = \dfrac{1}{2}$.

b. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

CHỦ ĐỀ 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải hệ phương trình bậc cao

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Các hệ phương trình đại số bậc cao thường rất khó giải và không thể nêu ra phương pháp chung để giải chúng. Do đó phương pháp thường được sử dụng là chuyển chúng về hệ bậc hai bằng một trong hai phương pháp:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (x^2 + y^2)^2 = 17 + 2x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3 + xy \\ (3 - xy)^2 = 17 + 2x^2y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3 + xy \\ \left[\begin{array}{l} xy = -2 \\ xy = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Khi đó, với:

- $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = -2 \\ x_4 = -2 \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(1, -2)$ và $(-2, 1)$.

Ví dụ 2: (HVQHQT – 2000): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Biến đổi phương trình (2) về dạng:

$$280 = [(x + y)^2 - 2xy]\,[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] = (16 - 2xy)(64 - 12xy)$$

$$\Leftrightarrow 3(xy)^2 - 40xy + 93 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} xy = 3 \\ xy = \dfrac{31}{3} \end{bmatrix}.$$

- Với $xy = 3$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm phương trình:}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \ \& \ y = 3 \\ x = 3 \ \& \ y = 1 \end{bmatrix}$$

- Với $xy = \dfrac{31}{3}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 31/3 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm phương trình:}$$

$$t^2 - 4t + \frac{31}{3} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm $(1, 3)$ và $(3, 1)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}.$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (x - y)^2(x + y) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x + y)^2 - 4xy](x + y) = 3 \quad (*) \\ (x + y)[(x + y)^2 - 2xy] = 15 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được:

$$2xy(x + y) = 12 \Rightarrow x + y = \frac{6}{xy}.$$

Thay x+y vào (*) ta được:

$$[(\frac{6}{xy})^2 - xy].\frac{6}{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 2 \Rightarrow x + y = 3.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm phương trình:}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 1 \text{ và } y_1 = 2 \\ x_2 = 2 \text{ và } y_2 = 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Nhận xét : Để giải hệ đã cho, chúng ta đã khéo léo sử dụng các phép thế chuyển hệ về dạng đối xứng loại I.

Sở dĩ ta xác định được hướng biến đổi như vậy là bởi nhận thấy các biểu thức trong hệ có thể biểu diễn được thông qua hệ đối xứng:

$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}.$$

Ví dụ 4: (ĐHCSND khối G – 2000). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}. \qquad (I)$$

Giải.

Cách 1:

Đặt:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0. \qquad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ S^3 - 3PS = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \ \& \ y = 3 \\ x = 3 \ \& \ y = -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm là (−1, 3) và (3, −1).

Cách 2:

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x^3 + (2 - x)^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 3 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \text{ và } y = 3 \\ x = 3 \text{ và } y = -1 \end{bmatrix}$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm là (−1, 3) và (3, −1).

Nhận xét : Trong cách 2 để giải hệ đã cho, chúng ta đã sử dụng phép thế chuyển việc giải hệ về giải một phương trình bậc 3.

Phương pháp trên là sự mở rộng tự nhiên từ phương pháp giải hệ gồm một phương trình bậc 2 và một phương trình bậc nhất của 2 ẩn mà chúng ta đã biết.

Ví dụ 5: (ĐHSP Vinh – 1999). Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \quad (1) \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \quad (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Giải.

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x_0^3 = x_0^2 + 7x_0^2 - mx_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 8x_0 + m = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Do x_0 duy nhất nên

$$\begin{cases} (3) \text{ vô nghiệm} \\ (3) \text{ nghiệm kép bằng } 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(3)} < 0 \\ \begin{cases} \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 16 - m < 0 \Leftrightarrow m > 16. \\ 4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Với $m > 16$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ (x - y)\left|x^2 + (y - 6)x + (y^2 - 6y + m)\right| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ x = y \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ x^2 + (y - 6)x + (y^2 - 6y + m)] = 0 \quad (*) \end{cases} & (III) \end{cases}$$

- Giải (II)

$$\begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 8x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

- Giải (III)

Coi (*) là phương trình bậc 2 theo x, ta có:

$$\Delta = (y - 6)^2 - 4(y^2 - 6y + m)$$
$$= -3(y - 2)^2 - 4(m - 12) < 0, \forall m > 16$$

Do đó (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm.

Vậy, với $m > 16$ hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Ví dụ 6: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) \end{cases}$$

Giải.

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$x(3-4y^2)=y(3-4x^2)\Leftrightarrow (x-y)(3+4xy)=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=x \\ xy=-3/4 \end{bmatrix}.$$

a. Với x = y. Thế vào phương trình đầu:

$$3-4x^3=3m-4m^3\Leftrightarrow (x-m)(-4x^2-4mx-4m^2+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=m \\ 4x^2+4mx+4m^2+3=0 \end{bmatrix}.$$

Khi x = m, suy ra nghiệm của hệ là x = y = m.

Khi $4x^2+4mx+4m^2-3=0$, ta có:

$\Delta' = 12-12m^2$.

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 12-12m^2<0 \Leftrightarrow |m|>1$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m=\pm 1$, phương trình có nghiệm kép.
  - Với m = −1, nghiệm kép của phương trình là: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.
  - Với m = 1, nghiệm kép của phương trình là: $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}$.
- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |m|<1$, phương trình có hai nghiệm:

$$x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{3(1-m^2)}}{2}\Rightarrow \text{nghiệm của hệ } x=y=\frac{-m\pm\sqrt{3(1-m^2)}}{2}$$

b. Với $xy=-\frac{3}{4}$. Thế vào phương trình đầu:

$$3x-4xy^2=m(3-4m^2)\Leftrightarrow 3x-4\left(-\frac{3}{4}\right)y=m(3-4m^2)\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{3}m(3-4m^2).$$

Vậy, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{3}m(3-4m^2) \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2-\frac{1}{3}m(3-4m^2)t-\frac{3}{4}=0,$$

ta có:

$\Delta = m^2(3-4m^2)^2+27>0, \forall m$.

Suy ra, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_{1,2}=\frac{1}{6}\left|m(3-4m^2)\pm\sqrt{m^2(3-4m^2)^2+27}\right|$$

$$\Rightarrow \text{nghiệm hệ: } \begin{bmatrix} x_3=t_1 \text{ và } y_3=t_2 \\ x_4=t_2 \text{ và } y_4=t_1 \end{bmatrix}$$

Kết luận:

- Với m = 1, hệ có bốn cặp nghiệm:

$(1, 1); (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{1}{6}(-1+\sqrt{26}), \frac{1}{6}(-1-\sqrt{26})), (\frac{1}{6}(-1-\sqrt{26}), \frac{1}{6}(-1+\sqrt{26}))$

- Với m = −1, hệ có bốn cặp nghiệm:

$(-1, -1); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{6}(1+\sqrt{26}), \frac{1}{6}(1-\sqrt{26})), (\frac{1}{6}(1-\sqrt{26}), \frac{1}{6}(1+\sqrt{26}))$

- Với $|m| > 1$, hệ có 3 cặp nghiệm: (m, m); (x_3, y_3) và (x_4, y_4).
- Với $|m| < 1$, hệ có năm cặp nghiệm:

(m, m) ; (x_1, y_1) ; (x_2, y_2); (x_3, y_3) và (x_4, y_4).

II. HỆ CHỨA ẨN Ở MẪU

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải hệ phương trình bậc cao

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng cách điều kiện có nghĩa cho hệ, ta chuyển hệ về hệ bậc cao rồi sử dụng phương pháp đã biết trong mục I.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (ĐHAN khối D – 1999). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $x, y \neq 0$.

Nhận xét:

$$4^2 = (x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2 \leq 4(x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}) = 4^2.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$x = y = \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

Kiểm tra lại, thấy $x = y = 1$ thoả mãn hệ.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Ví dụ 2: (ĐHXD – 1997). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0 & (*) \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện: $2x - y \neq 0$.

Chia cả hai vế của phương trình (*) cho $(2x - y)^2 \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)^2 - 5\frac{2x+y}{2x-y} + 6 = 0.$$

Đặt $t = \frac{2x+y}{2x-y} = (2x+y).\frac{1}{2x-y}$, ta được:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 2 \\ t = 3 \end{bmatrix}.$$

Với $t = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \\ (2x+y).\dfrac{1}{2x-y} = 2 \end{cases}$$

khi đó $2x + y$, $\frac{1}{2x-y}$ là nghiệm phương trình:

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u = 2 \\ u = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + y = 2 \text{ và } \dfrac{1}{2x-y} = 1 \\ 2x + y = 1 \text{ và } \dfrac{1}{2x-y} = 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 1/2 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \dfrac{3}{8} \text{ và } y_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{3}{4} \text{ và } y_2 = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Với $t = 3$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \\ (2x+y).\dfrac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

khi đó $2x + y$, $\frac{1}{2x-y}$ là nghiệm phương trình:

$v^2 - 3v + 3 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

Ví dụ 3: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = b \end{cases}.$$

Giải.

Điều kiện: $x^2 + y^2 > 0$.

Ta biến đổi:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \text{ và } x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Khi đó hệ phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)^2 - 2xy} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{a^3 - 3axy}{a^2 - 2xy} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ (3a - 2b)xy = a^2(a - b) \end{cases}.$$

a. Nếu $3a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{3a}{2}$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = a \\ 0.xy = -\dfrac{a^3}{2} \end{cases}.$$

- Với $a = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
- Với $a \neq 0$, hệ vô nghiệm.

b. Nếu $3a - 2b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \dfrac{3a}{2}$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = \dfrac{a^2(a - b)}{3a - 2b} \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm phương trình}$$

$$t^2 - at + \frac{a^2(a - b)}{3a - 2b} = 0. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng số nghiệm của hệ đã cho là số nghiệm của phương trình (1).

Ta có:

$$\Delta_{(1)} = a^2 - 4.\frac{a^2(a - b)}{3a - 2b} = \frac{a^2(2b - a)}{3a - 2b}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a = 0$.

Khi đó $\Delta_{(1)} = 0$, hệ có nghiệm $x = y = 0$ (loại).

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 0$.

Khi đó dấu $\Delta_{(1)}$ phụ thuộc vào dấu của $(2\dfrac{b}{a} - 1)(3 - 2\dfrac{b}{a})$.

- Nếu $\Delta_{(1)} = 0$

$\Leftrightarrow a = 2b \neq 0 \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép $t = \dfrac{a}{2} \Rightarrow x = y = \dfrac{a}{2}$.

- Nếu $\Delta < 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b/a < 1/2 \\ b/a > 3/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{b}{a} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt : $t_{1,2} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right)$.

- Với $x_1 = t_1 \Rightarrow y_1 = t_2$.
- Với $x_2 = t_2 \Rightarrow y_2 = t_1$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

Kết luận:

- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $a = b = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
  - Với $a = 2b \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = a/2$
  - Với $\left[\begin{array}{l} b/a < 1/2 \\ b/a > 3/2 \end{array}\right.$, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < \frac{3}{2}$, hệ có hai cặp nghiệm phân biệt: (x_1, y_1) và (x_2, y_2).

III. HỆ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải hệ phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp thường được sử dụng là chuyển chúng về hệ bậc hai bằng một trong hai phương pháp:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp chia khoảng.
3. Phương pháp đặt ẩn phụ

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ |x - 2y| = 3 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ (x-2y)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ |x - 2(4-2x)|^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ (5x-8)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x^2 - 16x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{11}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ và } y = 2 \\ x = \frac{11}{5} \text{ và } y = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(1, 2)$ và $\left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|+|x^2-y^2|=5 \\ 2(x^2+y^2)=5 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Đặt:

$$\begin{cases} u=|x-y| \\ v=|x+y| \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0.$$

Hệ được biến đổi về dạng:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-y|+|x+y|+|x^2-y^2|=5 \\ (x-y)^2+(x+y)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v+uv=5 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt:

$$\begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases}, \text{ điều kiện } S, P, S^2-4P \geq 0.$$

Khi đó:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=5 \\ S^2-2P=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2-2(5-S)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2+2S-15=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S=-5 \text{ và } P=10 \\ S=3 \text{ và } P=2 \end{bmatrix} \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}$$

khi đó u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=1 \\ t=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u=1 \text{ và } v=2 \\ u=2 \text{ và } v=1 \end{bmatrix}.$$

a. Với $u=1$ và $v=2$, ta được:

$$\begin{cases} |x-y|=1 \\ |x+y|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y|=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} & (III) \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} & (IV) \end{bmatrix}$$

- Giải (III): ta có x, y là nghiệm của phương trình:

$$z^2-2z+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\dfrac{1}{2} \text{ và } y=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \text{ và } y=\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Giải (IV): ta có x, y là nghiệm của phương trình:

$$z^2+2z+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z=-\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-\dfrac{1}{2} \text{ và } y=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \text{ và } y=-\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b. Với u = 2 và v = 1, ta được:

$$\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x+y|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y|=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad (V) \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad (VI) \end{array}\right.$$

- Giải (V): ta có x, y là nghiệm của phương trình:

$$z^2-z-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \text{ và } y=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \text{ và } y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Giải (IV): ta có x, y là nghiệm của phương trình:

$$z^2+z+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \text{ và } y=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \text{ và } y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 8 cặp nghiệm:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

IV. HỆ CHỨA CĂN THỨC

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Giải hệ phương trình chứa căn thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp thường được sử dụng là chuyển chúng về hệ bậc hai bằng một trong hai phương pháp:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \\ xy=27 \end{cases}.$$

Giải.

Xét phương trình thứ nhất của hệ:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3=4^3 \Leftrightarrow x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=64$$

$$\Leftrightarrow x+y=28.$$

Vậy, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 28t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 27 \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là: (1, 27) và (27, 1).

Ví dụ 2: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = a \\ x + y = 3a + 1 \end{cases} \quad (I)$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}. \quad (*)$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = a \\ (x-1) + (y-2) = 3a - 2 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{y-2} \end{cases}, \; u, v \geq 0.$$

Ta được:

$$\begin{cases} u + v = a \quad (2) \\ u^2 + v^2 = 3a - 2 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = a \\ uv = \dfrac{a^2 - 3a + 2}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - at + \frac{1}{2}(a^2 - 3a + 2) = 0. \quad (4)$$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (4) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 6a - 4 \geq 0 \\ a \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}(a^2 - 3a + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{5} \leq a \leq 1 \\ 2 \leq a \leq 3 + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $1 + \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{6}$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y-1} = m \\ y + \sqrt{x-1} = m \end{cases}.$$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Ta được :

$$\begin{cases} u^2 + v + 1 = m \\ v^2 + u + 1 = m \end{cases} \longrightarrow (u-v)(u+v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = 1-u \end{cases}.$$

a. Với v = u, thế vào phương trình đầu ta được.

$$f(u) = u^2 + u + 1 - m = 0. \quad (1)$$

Phương trình có nghiệm không âm ta phải có

$$1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1. \quad (*)$$

Lưu ý: Phương trình không thể có hai nghiệm không âm, bởi: $-\frac{b}{a} = -1$.

b. Với v = 1 − u, thế vào phương trình đầu ta được:

$$f(u) = u^2 - u + 2 - m = 0. \quad (2)$$

Ta có điều kiện v ≥ 0

$$\Leftrightarrow 1 - u \geq 0 \Leftrightarrow u \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$

Phương trình có nghiệm thuộc [0, 1]

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2) \text{ có 1 nghiệm thuộc } [0,1] \\ (2) \text{ có 2 nghiệm thuộc } [0,1] \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(0)f(1) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq m \leq 2. \quad (**)$$

Từ (*) và (**), ta được m ≥ 1.

Vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi m ≥ 1.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4} + |y| = m \\ \sqrt{y^2+4} + |x| = m \end{cases}.$$

Khi đó hãy chỉ ra các nghiệm của hệ.

Giải.

Với m ≤ 0 hệ vô nghiệm, ta đi xét với m > 0.

Đặt

$$\begin{cases} |x| = u \\ |y| = v \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Khi đó hệ (II) có dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{u^2+4}+v=m\\ \sqrt{v^2+4}+u=m\end{cases}\Rightarrow \sqrt{u^2+4}-\sqrt{v^2+4}=u-v$$

$$\Leftrightarrow u^2-v^2=(u-v)(\sqrt{u^2+4}+\sqrt{v^2+4})\Leftrightarrow \begin{cases}u=v\\ u+v=\sqrt{u^2+4}+\sqrt{v^2+4}\ (vn)\end{cases}$$

- Với $u=v\Leftrightarrow |x|=|y|$, hệ có dạng :

$$\begin{cases}|x|=|y|\\ \sqrt{x^2+4}=m-|x| \quad (1)\end{cases}$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}m-|x|\ge 2\\ 2m|x|=m^2-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}|x|\le m-2\\ |x|=\dfrac{m^2-4}{2m}\end{cases}\Rightarrow 0\le\frac{m^2-4}{2m}\le m-2\Leftrightarrow m\ge 2.$$

Vậy với $m\ge 2$ hệ đã cho có nghiệm và các cặp nghiệm là :

$$\left(\frac{m^2-4}{2m},\frac{m^2-4}{2m}\right),\left(-\frac{m^2-4}{2m},\frac{m^2-4}{2m}\right),$$

$$\left(\frac{m^2-4}{2m},-\frac{m^2-4}{2m}\right),\left(-\frac{m^2-4}{2m},-\frac{m^2-4}{2m}\right).$$

V. HỆ BA ẨN

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2-2xy+2yz-2zx+1=0\end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ (x-y)^2-2z(x-y)+1=0\end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được: $-1\le z\le 1$. (1)

Từ phương trình thứ hai:

$x-y$ tồn tại $\Leftrightarrow z^2-1\ge 0\Leftrightarrow |z|\ge 1$. (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có $z=\pm 1$.

- Với $z=1$, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases}x^2+y^2=0\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\ y=x-1\end{cases}$$ vô nghiệm.

- Với $z=-1$, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases}x^2+y^2=0\\ x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\ y=x+1\end{cases}$$ vô nghiệm.

Vậy, hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}.$$

Giải.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = 7 \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = 7 \\ xy + yz + zx = 11 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình cuối, ta được:

$$zx = 2. \qquad (*)$$

Vậy, hệ trở thành:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y(z + x) = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ y, x+z là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow y = z + x = 3.$$

Từ đó ta được hệ phương trình gồm x, z là:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ xz = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x, z là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 1 \text{ và } y_1 = 3 \text{ và } z_1 = 2 \\ x_2 = 2 \text{ và } y_2 = 3 \text{ và } z_2 = 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai nghiệm (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

Ví dụ 3: (ĐHTM – 1997). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases}.$$

Giải.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 2 \\ (y + 1)(z + 1) = 5 \\ (z + 1)(x + 1) = 10 \end{cases} \Rightarrow (x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 10 \\ (x+1)(y+1)(z+1) = -10 \end{cases}$$

Với $(x+1)(y+1)(z+1) = 10$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 10 \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y+1 = 1 \\ z+1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Với $(x+1)(y+1)(z+1) = -10$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = -10 \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ y+1 = -1 \\ z+1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -6 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có hai nghiệm là: $(1, 0, 4)$ và $(-3, -2, -6)$.

Ví dụ 4: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a \\ y^2 = (z-x)^2 + b \\ z^2 = (x-y)^2 + c \end{cases}, \text{ với } abc \neq 0.$$

Giải.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) = a \\ (y-z+x)(y+z-x) = b \\ (z-x+y)(z+x-y) = c \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} x-y+z = U \\ x+y-z = V \\ -x+y+z = W \end{cases}$$

khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} UV = a \\ VW = b \\ WU = c \end{cases} \overset{abc\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (UVW)^2 = abc \quad (*) \\ U = \dfrac{UVW}{VW} = \dfrac{UVW}{b} \\ V = \dfrac{UVW}{UW} = \dfrac{UVW}{c} \\ W = \dfrac{UVW}{UV} = \dfrac{UVW}{a} \end{cases}$$

a. Nếu $abc < 0$, hệ vô nghiệm.

b. Nếu $abc > 0$, từ $(*)$ ta được $UVW = \pm\sqrt{abc}$.

- Với $UVW = \sqrt{abc}$, ta được:

$$\begin{cases} U = \dfrac{\sqrt{abc}}{b} \\ V = \dfrac{\sqrt{abc}}{c} \\ W = \dfrac{\sqrt{abc}}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = \dfrac{\sqrt{abc}}{b} \\ x + y - z = \dfrac{\sqrt{abc}}{c} \\ -x + y + z = \dfrac{\sqrt{abc}}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{b} + \dfrac{\sqrt{abc}}{c}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{c} + \dfrac{\sqrt{abc}}{a}\right) \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{a} + \dfrac{\sqrt{abc}}{b}\right) \end{cases}.$$

- Với $UVW = -\sqrt{abc}$, tương tự ta được:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{b} + \dfrac{\sqrt{abc}}{c}\right) \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{c} + \dfrac{\sqrt{abc}}{a}\right) \\ z = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{abc}}{a} + \dfrac{\sqrt{abc}}{b}\right) \end{cases}.$$

VI. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐHQG – 2000): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases}$$

Bài tập 2: (ĐHNT – 99) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Bài tập 3: (ĐHCĐ – 2000) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases}$$

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^4 + y^4 = 12x^2y^2 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để hệ phương trình có đúng hai nghiệm.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(3-4y^2) = m(3-4m^2) \\ y(3-4y^2) = m(3-4m^2) \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = 12x^2y^2 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với a = 1.

b. Giải và biện luận hệ theo a.

Bài tập 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$$

Bài tập 8: Biện luận theo m số nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

Bài tập 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{4-y^2} = 1 \\ y\sqrt{4-x^2} = 1 \end{cases}$$

Bài tập 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y-3} = 4 \\ y + \sqrt{x-3} = 4 \end{cases}$$

Bài tập 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \end{cases}$$

Bài tập 12: Giải và biện luận các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a \end{cases}$$

Bài tập 13: Xác định các giá trị của m để hệ có nghiệm

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases}$$

Bài tập 14: Xác định các giá trị của m để hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = m \\ y\sqrt{1-x^2} = 2m \end{cases}.$$

Bài tập 15: Xác định các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = m \\ x + y = 3m + 1 \end{cases}.$$

Bài tập 16: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z} \end{cases}.$$

Bài tập 17: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -6 \end{cases}, \text{ với } z \geq 1.$$

Bài tập 18: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + z - x = \dfrac{xyz}{a^2} \\ x + z - y = \dfrac{xyz}{b^2} \\ x + y - z = \dfrac{xyz}{c^2} \end{cases}.$$

Bài tập 19: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\ \dfrac{xz}{x+z} = a \\ \dfrac{yz}{y+z} = a^2 \end{cases}.$$

Bài tập 20: Xác định a, b sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \end{cases}.$$

CHỦ ĐỀ 4
SỬ DỤNG TAM THỨC BẬC HAI CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng tam thức bậc hai chứng minh bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển bài toán bất đẳng thức về tam thức bậc hai theo một biến số trong bất đẳng thức (có thể là một tổ hợp biến).

Bước 2: Sử dụng tam thức bậc hai để đưa ra lời kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giả sử a, b, c là ba số dương sao cho:

$$ax + b(1 - x) > cx(1 - x), \text{ với } \forall x.$$

Chứng minh rằng khi đó, với mọi giá trị của x ta cũng có:

$$ax + c(1 - x) > bx(1 - x), \text{ với } \forall x$$

và $bx + c(1 - x) > ax(1 - x)$, với $\forall x$.

Giải.

Đặt:

$$f(x) = ax + b(1 - x) - cx(1 - x) = cx^2 + (a - b - c)x + b,$$

$$g(x) = ax + c(1 - x) - bx(1 - x) = bx^2 + (a - b - c)x + c,$$

$$h(x) = bx + c(1 - x) - ax(1 - x) = ax^2 + (b - a - c)x + c.$$

Nhận xét rằng: f(x), g(x), h(x) có cùng biệt số

$$\Delta = (a - b - c)^2 - 4bc = (b - a - c)^2 - 4ac$$

Vì $f(x) > 0, \forall x$, nên $\Delta < 0$, từ đó suy ra $g(x) > 0$ và $h(x) > 0$ với $\forall x$.

Ví dụ 2: Cho $b > c > d$. Chứng minh rằng với mọi a ta luôn có:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd). \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (a + b + c + d)^2 - 8(ac + bd) > 0$$

Viết lại vế trái của bất đẳng thức trên dưới dạng một tam thức bậc hai theo biến số a:

$$f(a) = a^2 + 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd.$$

Ta có:

$$\Delta' = (b - 3c + d)^2 - [(b + c + d)^2 - 8bd] = 8(b - c)(d - c).$$

Vì $b > c > d \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(a) > 0$ với mọi a

Ví dụ 3: Tìm m để

$$A = 9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz > 0$$

với mọi x, y, z không đồng thời bằng không.

Giải.

Viết lại biểu thức đã cho dưới dạng một tam thức bậc hai đối với x:

$$A = 9x^2 - 6(2y - z)x + 20y^2 + 4z^2 + myz$$

Để $A > 0$ với mọi x, ta phải có:

$\Delta' < 0$ với mọi y, z

$\Leftrightarrow 16y^2 + (m + 4)zy + 3z^2 > 0$ với mọi y, z

Để $16y^2 + (m + 4)zy + 3z^2 > 0$ với mọi y, ta phải có:

$\Delta < 0$ với mọi z $\Leftrightarrow z^2(m^2 + 8m - 176) < 0$ với mọi z.

- Nếu $z \neq 0$, thì điều kiện là $m^2 + 8m - 176 < 0 \Leftrightarrow -4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}$.
- Nếu $z = 0$, thì biểu thức ban đầu có dạng:

$$A = 9x^2 + 20y^2 - 12xy = (3x - 2y)^2 + 16y^2 > 0$$

với mọi x, y, không đồng thời bằng không.

Vậy với $-4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 5
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong mục này, ta ứng dụng tính chất định tính và định hình của tam thức bậc hai để xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hàm số

$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ xét trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Muốn tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, ta cần phân biệt ba trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu hoành độ đỉnh của Parabol $x_0 = -\dfrac{b}{2a} \in [\alpha, \beta]$ thì:

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{min} = f(x_0)$ đạt được khi: $x = x_0$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là $y_{max} = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$.

Trường hợp 2. Nếu hoành độ đỉnh của Parabol $x_0 = -\dfrac{b}{2a} < \alpha < \beta$ thì:

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{min} = f(\alpha)$ đạt được khi: $x = \alpha$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là $y_{max} = f(\beta)$ đạt được khi: $x = \beta$.

Trường hợp 3. Nếu hoành độ đỉnh của Parabol $\alpha < \beta < x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ thì:

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{min} = f(\beta)$ đạt được khi: $x = \beta$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là $y_{max} = f(\alpha)$ đạt được khi: $x = \alpha$.

Với $a < 0$ ta đi xét tương tự.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (HVNH TPHCM – 98): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}.$$

Giải.

Ta đi tìm y để phương trình

$$y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$$

có nghiệm với ẩn x.

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(3y - 20)x^2 + 2(y - 5)x + y - 3 = 0 \qquad (1)$$

Trường hợp 1: Với $y = \frac{20}{3}$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{10}{3}x + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{10}.$$

Trường hợp 2: Với $y \neq \frac{20}{3}$.

Khi đó (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \frac{20}{3} \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \frac{20}{3} \\ (y-5)^2 - (y-3)(3y-20) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \frac{20}{3} \\ \frac{5}{2} \leq y \leq 7 \end{cases}.$$

Từ đó, (1) có nghiệm khi $\frac{5}{2} \leq y \leq 7$.

Vậy:

$y_{max} = 7$ đạt được khi $x = -\frac{y-5}{3y-20} = -2$

$y_{min} = \frac{5}{2}$ đạt được khi $x = -\frac{y-5}{3y-20} = -\frac{1}{5}$.

Chú ý: Khi phát biểu bài toán dưới dạng hàm số, thường là;

"*Tìm tập giá trị của hàm số*".

Ví dụ 2: (Đề 70): Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+x+4}.$$

Giải.

Vì $x^2 + x + 4 \neq 0$ luôn đúng, do đó D = R.

Để tìm tập giá trị của hàm số ta đi tìm điều kiện của y để phương trình

$\frac{2x-1}{x^2+x+4} = y$ có nghiệm đối với ẩn x

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$yx^2 + (y-2)x + 4y + 1 = 0 \qquad (1)$$

Trường hợp 1: Với y = 0.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Trường hợp 2: Với $y \neq 0$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ (y-2)^2 - 4y(4y+1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{1}{15}(-4-2\sqrt{19}) \leq y \leq \frac{1}{15}(-4+2\sqrt{19}) \end{cases}.$$

Vậy, (1) có nghiệm khi

$$\frac{-4-2\sqrt{19}}{15} \leq y \leq \frac{-4+2\sqrt{19}}{15} \Leftrightarrow I = [\frac{-4-2\sqrt{19}}{15}, \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}].$$

Ví dụ 3: (Đề 16): Cho hàm số

$$y = \frac{x+1}{x^2+a}.$$

Xác định a để tập giá trị của y chứa đoạn [0, 1].

Giải.

Để tìm tập giá trị của hàm số ta đi tìm điều kiện của y để phương trình

$y = \frac{x+1}{x^2+a}$ có nghiệm đối với ẩn x

Phương trình $\Leftrightarrow yx^2 - x + ay - 1 = 0$ (1)

Trường hợp 1: Với y = 0.

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Khi đó ta phải có điều kiện $MS(-1) \neq 0 \Leftrightarrow 1 + a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1.$

Trường hợp 2: Với $y \neq 0$

Phương trình (1) có nghiệm

$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4y(ay - 1) \geq 0 \Leftrightarrow f(y) = 4ay^2 - 4y - 1 \leq 0$ (2)

Vậy, để tập giá trị của y chứa đoạn [0, 1] thì bất phương trình (2) phải nghiệm đúng với $y \in [0,1]$.

Xét các trường hợp:

- Nếu a = 0, khi đó

$$(2) \Leftrightarrow -4y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4} \text{ thoả mãn.}$$

- Nếu a > 0, khi đó điều kiện là:

$$\begin{cases} 4af(1) \leq 0 \\ 4af(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5 \leq 0 \\ -1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 0 < a \leq \frac{5}{4}.$$

- Nếu a < 0, khi đó (2) luôn đúng với $y \in [0,1]$.

Kết luận: để tập giá trị của y chứa đoạn [0, 1] điều kiện là $-1 \neq a \leq \frac{5}{4}$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$y = x^4 + 4x^2 + 2 \text{ với } -1 \leq x \leq 2.$$

Giải.

Đặt $t = x^2$, điều kiện $1 \leq t \leq 4$.

Ta được:

$$y = t^2 + 4t + 2.$$

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0 = -2$ nằm ở bên trái $[1, 4]$.

Vậy:

- $y_{min} = y(1) = 7$ đạt được khi:
  $$t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$
- $y_{max} = y(4) = 34$ đạt được khi:
  $$t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ví dụ 5: Giải sử x và y liện hệ với nhau bởi hệ thức

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + 1$.

Giải.

Viết lại hệ thức đã cho dưới dạng:

$$(x + y + 1)^2 + 5(x + y + 1) + 4 = -y^2 \Leftrightarrow S^2 + 5S + 4 = -y^2 \qquad (1)$$

Như vậy với $\forall x, y$ ta luôn có:

$$S^2 + 5S + 4 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le S \le -1.$$

Do đó:

$S_{min} = -4$ đạt được khi $x + y + 1 = -4$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = -5 \\ -y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$S_{max} = -1$ đạt được khi $x + y + 1 = -1$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = -2 \\ -y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ với $1 \le x \le 2$.

b. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$.

c. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

d. $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Bài tập 2: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với $a = b = 1$.

b. Xác định a, b để hàm số có miền giá trị $I = [-1, 9]$.

Bài tập 3: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - a}{x + 1}.$$

Tìm a để $\text{Max}y = 2$ với $x \in [0, 1]$.

Bài tập 4: Giả sử x và y liện hệ với nhau bởi hệ thức

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

CHỦ ĐỀ 6
GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÀM SỐ

I. VÍ DỤ MINH HOẠ

Các bài toán về tập xác định, sự biến thiên của hàm số,... liên quan chặt chẽ tới bất phương trình bậc hai. Trong chủ đề này chỉ xin nêu một vài ví dụ mang tính minh hoạ.

Ví dụ 1: Tuỳ theo m, tìm miền xác định của hàm số

$$y = x + 2 + \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}.$$

Giải.

Hàm số có nghĩa khi:

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0. \quad (1)$$

Trường hợp 1. Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

Miền xác định của hàm số là $D = [\frac{3}{2}, +\infty)$.

Trường hợp 2. Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Ta có:

$a = m + 1$;

$\Delta' = (m-1)^2 - (3m-3)(m+1) = -2m^2 - 2m + 4$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

a. Với $m < -2$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in R \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Khi đó miền xác định của hàm số là $D = \varnothing$.

b. Với $m = -2$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in R \Rightarrow \text{nghiệm của (1) là } x = 3.$$

Khi đó miền xác định của hàm số là $D = \{3\}$.

c. Với $-2 < m < -1$, ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

$$x_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{\Delta'}}{m+1}, x_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{\Delta'}}{m+1}$$

Trường hợp này $a < 0$ nên $x_2 < x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
f(x)	//////		0	+	0		//////

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x_2 \le x \le x_1$.

Khi đó miền xác định của hàm số là $D = [x_2, x_1]$.

d. Với $-1 < m < 1$, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2$$

Trường hợp này $a>0$ nên $x_2>x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	//////	0	+	

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x \le x_1 \vee x \ge x_2$.

Khi đó miền xác định của hàm số là $D = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$.

e. Với $m \ge 1$, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow \text{nghiệm của (1) là } \forall x \in R.$$

Khi đó miền xác định của hàm số là D=R.

Kết luận:

- Với $m < -2$, miền xác định của hàm số là $D = \varnothing$.
- Với $m = -2$, miền xác định của hàm số là $D = \{3\}$.
- Với $-2 < m < -1$, miền xác định của hàm số là $D = [x_2, x_1]$.
- Với $m = -1$, miền xác định của hàm số là $D = [\frac{3}{2}, +\infty)$.
- Với $-1 < m < 1$, miền xác định của hàm số là $D = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$.
- Với $m \ge 1$, miền xác định của hàm số là $D = R$.

Ví dụ 2: (ĐHBK – 86): Tuỳ theo m, tìm miền xác định của hàm số

$$y = \frac{\sqrt{mx^2 + (m+3)x + 3}}{x+1}.$$

Giải.

Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} mx^2 + (m+3)x + 3 \ge 0 \\ x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (mx+3)(x+1) \ge 0 \quad (1) \\ x + 1 \ne 0 \end{cases} \quad (I)$$

Trường hợp 1. Nếu $m = 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1) \ge 0 \\ x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow D = (-1, +\infty).$$

Trường hợp 2. Nếu $m \ne 0$

Phương trình $(mx + 3)(x + 1) = 0$ có hai nghiệm là -1 và $-\frac{3}{m}$.

Xét hiệu:

$$H = -\frac{3}{m} - (-1) = \frac{m-3}{m}.$$

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		0		3		$+\infty$
H		+	‖	−	0	+	

- Nếu $m < 0$ thì $-\frac{3}{m} > -1$.

  Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow -1 \le x \le -\frac{3}{m} \Rightarrow D = (-1, -\frac{3}{m}].$$

- Nếu $0 < m < 3$ thì $-\frac{3}{m} < -1$.

  Khi đó

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{3}{m} \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -\frac{3}{m}] \cup (-1, +\infty).$$

- Nếu $m = 3$ thì (1) đúng với mọi x, do đó: $D = R\backslash\{-1\}$.
- Nếu $m > 3$ thì $-\frac{3}{m} > -1$.

  Khi đó

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{m} \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup [-\frac{3}{m}, +\infty).$$

Kết luận:

- Nếu $m < 0$ thì $D = (-1, -\frac{3}{m}]$.
- Nếu $m = 0$ thì $D = (-1, +\infty)$.
- Nếu $0 < m < 3$ thì $D = (-\infty, -\frac{3}{m}] \cup (-1, +\infty)$.
- Nếu $m = 3$ thì $D = R\backslash\{-1\}$.
- Nếu $m > 3$ thì $D = (-\infty, -1) \cup [-\frac{3}{m}, +\infty)$.

Ví dụ 3: (ĐHKT 94) : Cho hàm số

$$y = f(x) = x^4 + 2mx^2 + m.$$

Tìm m để $f(x) \ge 0$ với mọi x.

Giải.

Ta cần tìm m để $x^4 + 2mx^2 + m \ge 0$ với mọi x.

Đặt $t = x^2$, $t \ge 0$. Khi đó:

$$f(t) = t^2 + 2mt + m \ge 0 \text{ với mọi } t \ge 0 \qquad (2)$$

ta có $\Delta' = m^2 - m$

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 - m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$, khi đó (2) luôn đúng.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' > 0$, điều kiện là phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < t_2 \le 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(0) \ge 0 \\ S/2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ m \ge 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy, với $m \ge 0$ ta có $f(x) \ge 0\ \forall x$.

Chú ý. Vì $t \ge 0$, do đó có thể biến đổi (2) về dạng:

$$m(2t + 1) \ge -t^2 \Leftrightarrow \frac{-t^2}{2t+1} \le m$$

rồi sử dụng phương pháp hàm số để giải.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tuỳ theo giá trị của tham số m, tìm tập xác định của các hàm số.

a. $y = x + 5 + \sqrt{mx^2 - 2x + 4}$.

b. $y = -2x + 3 + \sqrt{x^2 - 2mx + 2 - m}$.

Bài tập 2: Tìm m để các hàm số sau xác định với $\forall x \in R$:

a. $y = 2x + 1 + \sqrt{m(m+2)x^2 + 2mx + 2}$.

b. $y = x - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{(1-m)x^2 - 2mx + 5 - 9m}}$.

Bài tập 3: (ĐHGT TPHCM 99): Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}.$$

Tìm m để $f(x) > 0$, $\forall x \in [4, 5]$.

CHỦ ĐỀ 7

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Kiến thức được trình bày trong mục này được phát triển dựa vào kết quả bài báo của Nguyễn Công Sứ - GV ĐHKTMM Hà Nội - Đăng trên Tạp chí THTT số 2/2001.

Việc giải các phương trình vô định, tức là việc tìm nghiệm nguyên của các phương trình đại số với hệ số nguyên luôn đòi hỏi học sinh khả năng phân tích, đối chiếu dự đoán và phương pháp tư duy lôgíc để lựa chọn nghiệm thích hợp. Do vậy bài toán này thường thấy cả trong các đề toán trên các tạp chí toán học sơ cấp, các đề thi chọn học sinh giỏi, các đề thi vào đại học và trung học chuyên nghiệp. Với loại toán này không có phương pháp giải tổng quát. Ở đây giới thiệu một vài thủ pháp cơ bản để giải các bài toán tìm nghiệm nguyên thường gặp.

I. NGHIỆM NGUYÊN VÀ NGHIỆM HỮU TỶ

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Xét phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

trong đó a, b, c là các số nguyên. Ta đi xét các bài toán tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm nguyên hay nghiệm hữu tỷ.

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm hữu tỷ là biệt số Δ là một số chính phương.

Định lý 2. Nếu $x_0 = \frac{p}{q}$ với (p, q) = 1 là nghiệm hữu tỷ của (1) thì q là ước của a và p là ước của c.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu phương trình

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ với a, b là các số nguyên,}$$

có các nghiệm hữu tỷ, thì các nghiệm đó là những số nguyên.

Giải.

Nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Do các nghiệm là hữu tỷ nên $a^2 - 4b$ phải là số chính phương

$$\Leftrightarrow a^2 - 4b = k^2,\ k \in Z. \qquad (1)$$

Xét hai khả năng xảy ra đối với a

a. Giả sử a là số lẻ: khi đó từ (1) suy ra k lẻ.

b. Giả sử a là số chẵn: khi đó từ (1) suy ra k chẵn.

Vậy a, k cùng tính chẵn , lẻ.

Suy ra $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ là một số chẵn, tức $x_{1,2}$ là những số nguyên.

Ví dụ 2: Tìm các số nguyên a để phương trình

$$x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$$

có nghiệm nguyên.

Giải.

Phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta = 4a^2 + 16a - 151$ là số chính phương

$\Leftrightarrow 4a^2 + 16a - 151 = k^2$ với $k \in Z \Leftrightarrow (2a + 4)^2 - k^2 = 167$ với $k \in Z$.

$\Leftrightarrow (2a + 4 + k)(2a + 4 - k) = 167$ với $k \in Z$.

Vì 167 là số nguyên tố, nên:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+4+k=1 \\ 2a+4-k=167 \end{cases} \Rightarrow 4a+8=168 \Leftrightarrow a=40 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=83 \end{array}\right. \\ \begin{cases} 2a+4+k=-1 \\ 2a+4-k=-167 \end{cases} \Rightarrow 4a+8=-168 \Leftrightarrow a=-44 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-84 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy tồn tại hai giá trị $a = 40$ và $a = -44$ để phương trình có nghiệm nguyên.

II. HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO TÍNH CHẤT CHIA HẾT

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Lựa chọn nghiệm trong một tập hợp hữu hạn số là thủ pháp cơ bản để giải các phương trình vô định. Các thủ pháp giải đều nhằm xác định tập số chứa nghiệm sao cho có ít phần tử nhất. Cách đưa về tập hợp hữu hạn số ở đây dựa vào tính chất chia hết của số nguyên.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$xy - 3y = 2x - 1 \Leftrightarrow y(x - 3) = 2x - 1$$

thấy ngay x = 3 không là nghiệm, với $x \neq 3$, ta được:

$$y = \frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}$$

Để y nguyên thì x – 3 phải là ước của $5 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 1$ và $x - 3 = \pm 5$.

Ta đi xét riêng các trường hợp:

- Với $x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$, thì $y = 7$.
- Với $x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 2$, thì $y = -3$ không thoả mãn điều kiện dương.
- Với $x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8$, thì $y = 3$.
- Với $x - 3 = -5 \Leftrightarrow x = -2$ không thoả mãn điều kiện dương.

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm là (4, 7); (8, 3).

Nhận xét:

- Trong ví dụ trên ta đã tìm cách biểu diễn y thông qua một hàm số của x, từ đó sử dụng điều kiện y nguyên để suy ra điều kiện:

$$\frac{5}{x-3} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x - 3 \text{ phải là ước của } 5.$$

- Bạn đọc cũng có thể áp dụng tư duy kiểu trên cho việc biểu diễn x thông qua một hàm của y như:

$$x = 3 + \frac{5}{y-2}.$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^2 - y^2 = 1999.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x - y)(x + y) = 1999$$

Vì 1999 là số nguyên tố nên ước số nguyên của 1999 chỉ có thể là ± 1; ± 1999. Từ đó suy ra nghiệm (x, y) được xác định từ các hệ:

- Với

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1999 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

- Với

$$\begin{cases} x + y = 1999 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ y = 999 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là (1000, 999).

Nhận xét: Trong ví dụ trên ta đã tìm cách biểu diễn 1999 thông qua một tích các số nguyên dương và sử dụng nhận xét 1999 là số nguyên tố nhằm xác định tập số chứa nghiệm sao cho có ít phần tử nhất.

Với tư duy kiểu trên ta có thể áp dụng để giải bài toán sau:

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{!}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p},$$

trong đó p là số nguyên tố.

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$xy = px + py \Leftrightarrow (x - p)(y - p) = p^2.$$

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là $\pm 1; \pm p; \pm p^2$. Từ đó suy ra nghiệm (x, y) được xác định từ các hệ:

- Với :

$$\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + p \\ y = p + p^2 \end{cases}.$$

- Với :

$$\begin{cases} x - p = -1 \\ y - p = -p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p - 1 \\ y = p - p^2 < 0 \ (1) \end{cases}$$ không thoả mãn điều kiện.

- Với :

$$\begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = 2p \end{cases}.$$

- Với :

$$\begin{cases} x - p = -p \\ y - p = -p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ không thoả mãn điều kiện.

- Với :

$$\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p + p^2 \\ y = 1 + p \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm là: $(1 + p, p + p^2)$; $(2p, 2p)$; $(p + p^2, 1 + p)$.

III. HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO ĐIỀU KIỆN CỦA CÁC ẨN

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dựa vào điều kiện của các ẩn để phương trình có nghĩa, từ đó xác định được tập số chứa nghiệm sao cho có ít phần tử nhất.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}.$$

Giải.

Ta phải có điều kiện: $0 < x, y < 50$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x} \Rightarrow y = 50 + x - 2\sqrt{50x} = 50 + x - 10\sqrt{2x}$$

Để y nguyên thì $\sqrt{2x}$ phải nguyên

$$\Rightarrow 2x = 4k^2, k \in Z \Leftrightarrow x = 2k^2, k \in Z:$$

Mặt khác vì $0 < x < 50$

$$\Leftrightarrow 0 < 2k^2 < 50, k \in Z \Leftrightarrow 0 < k < 5, k \in Z \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4.$$

Ta đi xét riêng các trường hợp:

- Với $k = 1 \Leftrightarrow x = 2$ thì $y = 32$.
- Với $k = 2 \Leftrightarrow x = 8$ thì $y = 18$.
- Với $k = 3 \Leftrightarrow x = 18$ thì $y = 8$.
- Với $k = 4 \Leftrightarrow x = 32$ thì $y = 2$.

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm là

$$(2, 32); (8, 18); (18, 8); (32, 2).$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên ta kết hợp điều kiện x nguyên dương và 2x là số chính phương để có được $2x = 4k^2$, tuy nhiên có thể sử dụng tuần tự như sau:

- Vì $\sqrt{2x}$ phải nguyên $\Rightarrow 2x = k^2, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{k^2}{2}, k \in Z.$
- Vì x nguyên dương $\Rightarrow$ k là số chẵn.
- Vì $0 < x < 50 \Leftrightarrow 0 < \frac{k^2}{2} < 50, k \in Z \Leftrightarrow 0 < k < 10, k \in Z$

Vậy: $k = 2, 4, 6, 8$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z.$$

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x + y = xyz.$$

Do tính đối xứng của x, y trong phương trình nên có thể giải thiết rằng $x \le y$. Từ đó:

$$0 < xyz = x + y \le 2y \Leftrightarrow 0 < xz \le 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xz = 2 \\ xz = 1 \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra nghiệm (x, y, z) được xác định từ các hệ:

- Với

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2.$$

- Với

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

- Với $x = z = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 0$ không thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm là: (2, 2, 1); (1, 1, 2).

IV. HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM BẰNG CÁCH SẮP THỨ TỰ CHÚNG

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để giảm bớt cách thử khi tìm nghiệm ta có thể sắp thứ tự các giá trị của ẩn nếu vai trò của chúng như nhau rồi lần lượt xét giá trị của từng ẩn.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Giải.

Do tính đối xứng của x, y, z trong phương trình nên có thể giải thiết rằng $1 \le x \le y \le z$. Từ đó ta thử trong các trường hợp:

a. Với $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ vô nghiệm.

b. Với $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (y - 2)(z - 2) = 4$.

Ước số nguyên của 4 là $\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

Mặt khác vì $0 \le y - 2 \le z - 2$ nên chỉ có thể chọn là 1, 2, 4. Từ đó suy ra nghiệm y, z được xác định từ các hệ:

- Với

$$\begin{cases} y - 2 = 1 \\ z - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 6 \end{cases}.$$

- Với

$$\begin{cases} y - 2 = 2 \\ z - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 4 \end{cases}.$$

c. Với $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$.

- Nếu $y = 3$ thì $z = 3$.
- Nếu $y \ge 4$ thì $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 2.\frac{1}{y} \le 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ vô nghiệm.

d. Với $x = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 3.\frac{1}{x} = 3.\frac{1}{4} < 1$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm (tráo đổi vai trò của x, y, z) là:

(2, 3, 6); (2, 6, 3); (6, 2, 3); (6, 3, 2); (3, 2, 6); (3, 6, 2);

(2, 4, 4); (4, 2, 4); (4, 4, 2);

(3, 3, 3).

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20.$$

Giải.

Do tính đối xứng của x, y, z trong phương trình nên có thể giải thiết rằng $1 \le x \le y \le z$. Do đó

$$20 = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \le 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 \le 5 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

Từ đó ta thử trong các trường hợp:

a. Với $x = 1 \Rightarrow y^2 + z^2 + yz = 19$.

Ta lại có:

$$19 = y^2 + z^2 + yz \le 2y^2 + y^2 = 3y^2 \Rightarrow y^2 \le \frac{19}{3} \Rightarrow 1 \le y \le 2$$

- Nếu $y = 1$, thì $z^2 + z = 18$ không có nghiệm nguyên.

- Nếu $y = 2$, thì $z^2 + 2z = 15 \Rightarrow z = 3$.

  Vậy được nghiệm $(1, 2, 3)$.

b. Với $x = 2 \Rightarrow y^2 + z^2 + 2yz = 16$.

Ta lại có:

$$16 = y^2 + z^2 + 2yz \le 2y^2 + 2y^2 = 4y^2 \Rightarrow y^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le y \le 2$$

- Nếu $y = 2$, thì $z^2 + 4z = 12 \Rightarrow z = 2$.

  Vậy được nghiệm $(2, 2, 2)$.

Vậy, phương trình có các cặp nghiệm (tráo đổi vai trò của x, y, z) là:

$(1, 2, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(2, 1, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 2, 1)$; $(3, 1, 2)$;

$(2, 2, 2)$.

V. GIẢN ƯỚC CHO ƯỚC SỐ CHUNG

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4).$$

Giải.

Giả sử (x_0, y_0, z_0, t_0) là nghiệm của phương trình trên. Gọi d là ước chung lớn nhất của chúng, ta có:

$$x_0 = dx_1,\ y_0 = dy_1,\ z_0 = dz_1,\ t_0 = dt_1,$$

do vậy: x_1, y_1, z_1, t_1 nguyên tố cùng nhau. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$x_1^4 + 4y_1^4 = 2(z_1^4 + 4t_1^4).$$

Do $4y_1^4$, $2(z_1^4 + 4t_1^4)$ là những số chẵn nên x_1^4 phải chẵn, tức là $x_1 = 2x_2$, khi đó:

$$16x_2^4 + 4y_1^4 = 2(z_1^4 + 4t_1^4) \Leftrightarrow z_1^4 + 4t_1^4 = 2(y_1^4 + 4x_2^4).$$

Lập luận tương tự, ta lại có: $z_1 = 2z_2$.

Tiếp tục công việc như trên thêm hai bước, ta được: $y_1 = 2y_2$, $t_1 = 2t_2$.

Vậy, x_1, y_1, z_1, t_1 không nguyên tố cùng nhau, điều này trái với giả thiết.

Kết luận: phương trình vô nghiệm.

VI. ĐƯA VỀ TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}} = y$$

trong đó vế trái có n dấu căn.

Giải.

Nhận xét rằng phương trình luôn có nghiệm $(0, 0)$

a. Nếu $n = 1$, phương trình có dạng:

$$\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \ (x \ge 0).$$

Vậy, nghiệm (x, y) là (t, t^2), $t \in N$.

b. Nếu n = 2, phương trình có dạng:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \Rightarrow x+\sqrt{x} = y^2 \ (x \geq 0).$$

Vì x y nguyên không âm, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên không âm

$$\Rightarrow x = t^2, t \in N.$$

Khi đó:

$$t^2 + t = y^2 \Rightarrow t^2 \leq y^2 < (t+1)^2$$

do vậy chỉ có thể là y = 0 và nghiệm (x, y) là (0, 0).

c. Với $n \geq 3$, ta có

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}} = y^2 - x,$$

trong đó vế trái có n − 1 dấu căn.

- Đặt $y_1 = y^2 - x$ là số nguyên dương, ta có

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}} = y_1^2 - x,$$

trong đó vế trái có n − 2 dấu căn.

- Tiếp tục làm như vậy n − 2 lần dẫn đến

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = y_{n-2}^2 - x.$$

Như vậy bài toán được đưa về b) và chỉ có nghiệm (0, 0).

Kết luận: phương trình có nghiệm là (0, 0).

MỤC LỤC

Trang

GIỚI THIỆU CHUNG 3

PHẦN I

TẬP HỢP

Bài toán 1: Xác định tập hợp 6
Bài toán 2: Chứng minh $A \subset B$ 7
Bài toán 3: Chứng minh $A = B$ 7

PHẦN II

HÀM SỐ

Chủ đề 1: Tập xác định của hàm số 15
Chủ đề 2: Sự biến thiên của hàm số 23
Chủ đề 3: Tính chẵn, lẻ của hàm số 27
Bài toán 1: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số 27
Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để hàm số chẵn, lẻ 27
Chủ đề 4: Trục đối xứng của đồ thị hàm số 35
Bài toán 1: Chứng minh đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng 35
Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng 35
Bài toán 3: Tìm đường cong đối xứng với đồ thị (C) qua đường thẳng $y = b$ 36
Chủ đề 5: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số 39
Bài toán 1: Chứng minh đồ thị hàm số nhận điểm I làm tâm đối xứng 39
Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số nhận điểm I làm tâm đối xứng 39
Bài toán 3: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) đối xứng qua điểm I 39
Bài toán 4: Tìm đường cong đối xứng với đồ thị (C) qua điểm I 40
Chủ đề 6: Hàm số bậc nhất. 45
Chủ đề 7: Hàm số bậc hai. 57
Chủ đề 8: Sơ lược về hàm số luỹ thừa. 68
Chủ đề 9: Sơ lược về hàm số chứa căn thức. 72
Chủ đề 10: Sơ lược về hàm phân thức. 76
Chủ đề 11: Sơ lược về hàm số chứa dấu trị tuyệt đối. 78
Bài toán 1: Đồ thị $y = |f(x)|$ 78
Bài toán 2: Đồ thị $y = f(|x|)$ 78
Bài toán 3: Đồ thị $y = |f(|x|)|$ 78
Bài toán 4: Đồ thị $y = |u(x)|.v(x)$ 79
Bài toán 5: Đồ thị $|y| = f(x)$ 79

PHẦN III
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẬC NHẤT

CHƯƠNG I
PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Chủ đề 1: Phương trình bậc nhất một ẩn 84
Chủ đề 2: Phương trình bậc nhất có nghiệm thoả mãn điều kiện K 88

CHƯƠNG II
HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Chủ đề 1: Hệ phương trình bậc nhất 92
Bài toán 1: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất 92
Bài toán 2: Hệ thức liên hệ giữa các nghiệm 95
Chủ đề 2: Hệ phương trình bậc nhất có nghiệm thoả mãn điều kiện K 100

CHƯƠNG III
BẤT ĐẲNG THỨC

Chủ đề 1: Bất đẳng thức 111
Bài toán 1: Phương pháp chứng minh bất đẳng thức 120
Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức giải phương trình, bất phương trình và hệ 115
Chủ đề 2: Bất đẳng thức liên quan đến trị tuyệt đối và ứng dụng 118
Bài toán 1: Chứng minh bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối 118
Bài toán 2: Sử dụng tính chất trị tuyệt đối giải phương trình, bất phương trình và hệ 119
Chủ đề 3: Bất đẳng thức Côsi và ứng dụng 126
Bài toán 1: Sử dụng bất đẳng thức Côsi chứng minh bất đẳng thức 127
Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức Côsi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất 129
Bài toán 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi giải phương trình, bất phương trình và hệ 131
Chủ đề 4: Bất đẳng thức Bunhiacôpxki và ứng dụng. 138
Bài toán 1: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki chứng minh bất đẳng thức 139
Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất 141
Bài toán 3: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki giải phương trình, bất phương trình và hệ 143

CHƯƠNG IV
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Chủ đề 1: Bất phương trình bậc nhất một ẩn 148
Chủ đề 2: Dấu nhị thức bậc nhất 152

CHƯƠNG V

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Chủ đề 1: Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 158
Chủ đề 2: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 168

CHƯƠNG VI

CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ BẬC NHẤT

Chủ đề 1: Phương trình quy về bậc nhất 170
Bài toán 1: Phương trình tích 170
Bài toán 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu 171
Bài toán 3: Phương trình chứa dấu trị tuyệt đối 174
Bài toán 4: Phương trình chứa căn 178
Chủ đề 2: Bất phương trình quy về bậc nhất 182
Bài toán 1: Bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu 182
Bài toán 2: Bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối 185
Bài toán 3: Bất phương trình chứa căn 186
Chủ đề 3: Một số bài toán đưa về hệ bậc nhất 189
Bài toán 1: Xét hai phương trình bậc hai có nghiệm chung 189
Bài toán 2: Giải hệ phương trình bậc cao, hệ chứa dấu trị tuyệt đối và hệ chứa căn 191
Bài toán 3: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng 193
Bài toán 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức hai ẩn bậc hai 196

PHẦN IV

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẬC HAI

CHƯƠNG I

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chủ đề 1: Phương trình bậc hai 201
Chủ đề 2: Dùng đồ thị giải phương trình bậc hai 205
Chủ đề 3: Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai 207
Chủ đề 4: Định lý Viét và các ứng dụng 213
Bài toán 1: Tìm hai số biết tổng và tích 213
Bài toán 2: Tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm 214
Bài toán 3: Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số 217
Bài toán 4: Xét dấu các nghiệm 219
Bài toán 5: Điều kiện nghiệm của phương trình bậc hai 220
Bài toán 6: Giải một số bài toán hàm số 223

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chủ đề 1: Hệ gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất hai ẩn 229
Chủ đề 2: Hệ phương trình đối xứng loại I. 235
Chủ đề 3: Hệ phương trình đối xứng loại II 243

Chủ đề 4: Hệ phương trình đẳng cấp 251
Chủ đề 5: Hệ phương trình bậc hai không mẫu mực 257

CHƯƠNG III

TAM THỨC BẬC HAI

Chủ đề 1: Định lý thuận về dấu nhị thức bậc hai 259
Chủ đề 2: Bất phương trình bậc hai 263
Chủ đề 3: Định lý đảo về dấu nhị thức bậc hai 271
Chủ đề 4: Dấu tam thức trên một miền 279
Bài toán 1: Dấu tam thức trên R 279
Bài toán 2: Dấu tam thức trên $(-\infty, \alpha)$ & $(\alpha, +\infty)$ 279
Bài toán 3: Dấu tam thức trên (α, β) 280

CHƯƠNG IV

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chủ đề 1: Hệ gồm một phương trình bậc hai và một bất phương trình bậc nhất một ẩn 287
Bài toán 1: Giải hệ bằng định nghĩa 287
Bài toán 2: Giải hệ bằng phương pháp đồ thị 287
Bài toán 3: Giải hệ bằng phương pháp điều kiện cần và đủ 288
Chủ đề 2: Hệ gồm hai bất phương trình bậc hai một ẩn 295
Chủ đề 3: Hệ bất phương trình bậc hai hai ẩn 301

CHƯƠNG V

CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ BẬC HAI

Chủ đề 1: Phương trình quy về phương trình bậc hai 306
Bài toán 1: Phương trình bậc cao 306
Bài toán 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu 316
Bài toán 3: Phương trình chứa dấu trị tuyệt đối 319
Bài toán 4: Phương trình chứa căn 324
Chủ đề 2: Bất phương trình quy về bậc hai 332
Bài toán 1: Bất phương trình bậc cao 332
Bài toán 2: Bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối 333
Bài toán 3: Bất phương trình chứa căn 338
Chủ đề 3: Hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc hai 342
Bài toán 1: Hệ phương trình bậc cao 342
Bài toán 2: Hệ phương trình chứa ẩn ở mẫu 347
Bài toán 3: Hệ phương trình chứa dấu trị tuyệt đối. 350
Bài toán 4: Hệ phương trình chứa căn 352
Bài toán 5: Hệ phương trình ba ẩn 355
Chủ đề 4: Sử dụng tam thức bậc hai chứng minh bất đẳng thức 361
Chủ đề 5: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất 363
Chủ đề 6: Giải một số bài toán hàm số 367
Chủ đề 7: Các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên 371

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập **PHẠM THÀNH HƯNG**

Biên tập nội dung:

ĐỖ HỮU PHÚ

Sửa bản in:

PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa:

HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN ĐẠI SỐ 10

Mã số: 1L – 01020 – 01204

In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại xí nghiệp in Đường Sắt.

Giấy phép xuất bản số: 14 – 422/XB – QLXB, ký ngày 7/4/2004.

Số trích ngang: 124KH/XB. In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2004.